# DAS UMGEKEHRTE PROBLEM

DER

# BRENNLINIEN.

Von

Dr. G. W. STRAUCH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEM.-NATURW. CLASSE AM 17. NOVEMBER 1859.

---

## Einleitung.

### §. 1.

Wenn von einer ebenen Curve Lichtstrahlen zurückgeworfen oder gebrochen werden, und diese sich hierauf in einer stetigen Folge von Punkten schneiden; so wird dadurch eine neue Curve erzeugt, welche man Brennlinie *(linea caustica)* nennt, und zwar Brennlinie durch Zurückwerfung *(linea catacaustica)* oder Brennlinie durch Brechung *(linea diacaustica)*. Die ursprünglichen Lichtstrahlen können entweder alle mit einander parallel sein, oder alle von einem leuchtenden Punkte herkommen; und eine Brennlinie kann entweder aus einer Curve bestehen, oder sich in einen einzigen Punkt zusammenziehen.

Der erste Punkt einer Brennlinie liegt da, wo der erste und zweite der (zurückgeworfenen oder gebrochenen) Lichtstrahlen sich schneiden. Der zweite Punkt einer Brennlinie liegt sodann da, wo der zweite und dritte der (zurückgeworfenen oder gebrochenen) Lichtstrahlen sich schneiden. Und so fort.

Hierdurch ist veranschaulicht, dass die Brennlinien von sämmtlichen (zurückgeworfenen oder gebrochenen) Lichtstrahlen berührt werden; und weil die Lichtstrahlen nur grade Linien sind, so ist diese Berührung auch nur eine der ersten Ordnung, d. h. die Brennlinien können als die einhüllenden Gränz-Curven sämmtlicher (zurückgeworfener oder gebrochener) Lichtstrahlen definirt werden. So oft aber die eingehüllten Curven nur grade Linien sind, können die einhüllenden Gränz-Curven nicht auch grade Linien sein, d. h. alle Brennlinien, welche sich nicht in einen einzigen Punkt zusammenziehen, können nur krumme Linien sein. (Man vergleiche den Nachtrag §. 25—27.)

Die Brennlinien machen also keine eigene Gattung von Curven aus; und es kann jede beliebige Curve als Brennlinie gelten, so dass man das Problem auch umkehren, und diejenige zurückwerfende oder brechende Curve aufsuchen kann, zu welcher irgend eine vorgeschriebene Curve sich als Katakaustika oder Diakaustika verhält.

## §. 2.

Eine Katakaustika ist, wie gesagt, diejenige Brennlinie, welche entsteht, wenn die von einer Curve (Reflexions-Curve genannt) zurückgeworfenen Lichtstrahlen sich in stetig aufeinander folgenden Punkten schneiden. Wenn man nun in den Punkt der Reflexions-Curve, wo ein Lichtstrahl eintrifft und zurückgeworfen wird, die Normale zieht, so heisst der vom eintreffenden Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel der Einfallswinkel, dagegen wird der vom zurückgeworfenen Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel der Ausfallswinkel genannt. Bei jeder Lichtreflexion besteht aber das Gesetz, dass der Ausfallswinkel gleich ist dem Einfallswinkel; und mit Hülfe dieses Gesetzes kann man zu jeder vorgeschriebenen Reflexions-Curve die zugehörige Katakaustika aufsuchen.

Sind nämlich die ursprünglichen Lichtstrahlen alle mit einander parallel; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Reflexions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen ebenfalls parallel ist. Kommen aber die ursprünglichen Lichtstrahlen alle von einem leuchtenden Punkte her; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Reflexions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht. Bei solcher Einrichtung sei

$$1)\qquad F(x, y) = 0$$

die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung der vorgeschriebenen Reflexions-Curve; und wenn man mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die auf dasselbe System bezogenen Coordinaten der gesuchten Katakaustika bezeichnet, so gelangt man bekanntlich zu folgenden Gleichungen:

$$2)\qquad \mathfrak{x} = x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$3)\qquad \mathfrak{y} = y + u \,.\, (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

Hier ist $p$ das gebräuchliche Abkürzungszeichen statt $\frac{dy}{dx}$, und $u$ bedeutet die goniometrische Tangente des vom zurückgeworfenen Lichtstrahle und von der Abscissenaxe gebildeten Winkels. Wenn nun die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so ist

$$4)\qquad u = \frac{2 \,.\, p}{1-p^2}$$

wenn die ursprünglichen Lichtstrahlen aber von einem leuchtenden Punkte herkommen, so ist

$$5)\qquad u = \frac{2 \,.\, (x-g) \,.\, p - y \,.\, (1-p^2)}{2 \,.\, y \,.\, p + (x-g) \,.\, (1-p^2)}$$

wo $g$ die feste Abscisse des leuchtenden Punktes bedeutet.

Wenn man jetzt die der vorgeschriebenen Reflexions-Curve zugehörige Gleichung $F(x, y) = 0$ zweimal differentiirt, und sodann die zwei sich ergebenden Differentialgleichungen mit 1), 2), 3) verbindet; so hat man fünf Gleichungen, aus welchen man die vier Bestandtheile $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminiren muss. Dadurch ergibt sich eine zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestehende neue Gleichung

$$6)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

wodurch die gesuchte Katakaustika bestimmt ist; und man erkennt, dass zur Bestimmung einer Katakaustika keine Integration nöthig ist.

## §. 3.

Eine Diakaustika ist (§. 1) diejenige Brennlinie, welche entsteht, wenn Lichtstrahlen durch eine Curve (Refractions-Curve genannt) hindurchgehen, und bei ihrem Durchgange so von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden, dass sie sich hierauf in stetig aufeinander folgenden Punkten schneiden. Wenn man nun in den Punkt der Refractions-Curve, wo ein Lichtstrahl durchgeht und gebrochen wird, die Normale zieht, und auch die ursprüngliche Richtung des Lichtstrahles verlängert; so heisst der vom eintreffenden Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel der *Einfallswinkel*, der vom gebrochenen Lichtstrahle und von der Normale gebildete Winkel heisst der *Brechungswinkel*, und der von der Verlängerung des ursprünglichen Lichtstrahles und vom gebrochenen Lichtstrahle gebildete Winkel heisst der *Ablenkungswinkel*. Bei jeder Lichtrefraction besteht aber das Gesetz, *dass im ganzen Verlaufe der Refractions-Curve das Verhältniss, in welchem der Sinus des Einfallswinkels und der Sinus des Brechungswinkels zu einander stehen, constant bleibt.* Ist also $\eta$ der Einfallswinkel, und $\omega$ der Brechungswinkel; so muss sich zwischen ihnen, wie sie sich auch immer ändern mögen, die Gleichung

7) $$\frac{\sin\eta}{\sin\omega} = \lambda$$

stattfinden, wo der Werth des $\lambda$, wie gesagt, constant ist, und das *Brechungsverhältniss* genannt wird.

Mit Hülfe dieses Gesetzes kann man zu jeder vorgeschriebenen Refractions-Curve die zugehörige Diakaustika aufsuchen.

Sind nämlich die ursprünglichen Lichtstrahlen alle mit einander parallel; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Refractions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen ebenfalls parallel ist. Kommen aber die ursprünglichen Lichtstrahlen alle von einem leuchtenden Punkte her; so richte man das Coordinatensystem der vorgeschriebenen Refractionscurve so ein, dass ihre Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht. Bei solcher Einrichtung sei

8) $$F(x, y) = 0$$

die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung der vorgeschriebenen Refractions-Curve; und wenn man mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die auf dasselbe System bezogenen Coordinaten der gesuchten Diakaustika bezeichnet, so gelangt man bekanntlich zu folgenden Gleichungen:

9) $$\mathfrak{x} = x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

10) $$\mathfrak{y} = y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

Hier ist $p$ wiederum das gebräuchliche Abkürzungszeichen statt $\frac{dy}{dx}$, und $v$ bedeutet die goniometrische Tangente des vom gebrochenen Lichtstrahle und von der Abscissenaxe gebildeten Winkels. Wenn nun die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so ist

11) $$v = -\frac{p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}$$

wenn die ursprünglichen Lichtstrahlen aber von einem leuchtenden Punkte herkommen, so ist

$$12)\qquad v = \frac{-((x-g)+y.p).p+\sqrt{\lambda^2.((x-g)^2+y^2).(1+p^2)-((x-g)+y.p)^2}}{+((x-g)+y.p)+p.\sqrt{\lambda^2.((x-g)^2+y^2).(1+p^2)-((x-g)+y.p)^2}}$$

wo $g$ die feste Abscisse des leuchtenden Punktes bedeutet.

Wenn man jetzt die der vorgeschriebenen Refractions-Curve zugehörige Gleichung $F(x, y) = 0$ zweimal differentiirt, und dann die zwei sich ergebenden Differentialgleichungen mit 8), 9), 10) verbindet; so hat man fünf Gleichungen, aus welchen man die vier Bestandtheile $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminiren muss. Dadurch ergibt sich eine zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestehende neue Gleichung

$$13)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

wodurch die gesuchte Diakaustika bestimmt ist; und man erkennt, dass man auch zur Bestimmung einer Diakaustika keine Integration nöthig hat.

Zusatz. Die diakaustischen Resultate gehen alle, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die katakaustischen über. Gleichung 11) geht nämlich über in

$$v = -\frac{p+p}{1-p^2} = -\frac{2.p}{1-p^2} = -u$$

und ebenso geht Gleichung 12) über in

$$v = \frac{-((x-g)+y.p).p+\sqrt{(y-(x-g).p)^2}}{+((x-g)+y.p)+p.\sqrt{(y-(x-g).p)^2}} = -\frac{2.(x-g).p-y.(1-p^2)}{2.y.p+(x-g).(1-p^2)} = -u$$

Wenn man also $\lambda = -1$ setzt, so wird $v = -u$, und dabei wird $dv = -du$; und wenn man $-u$ und $-du$ bezüglich statt $v$ und $dv$ in die Gleichungen 9) und 10) setzt, so bekommt man wieder die Gleichungen 2) und 3).

## §. 4.

Jetzt kann man das Problem der Brennlinien auch umkehren, d. h. man kann auch die Brennlinien vorschreiben, und die zugehörige Reflexions- oder Refractions-Curve aufsuchen. Wenn nämlich durch die Gleichung

$$14)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}) = 0$$

eine bestimmte Curve als Katakaustika oder Diakaustika vorgeschrieben ist, und man die zugehörige Reflexions- oder Refractions-Curve sucht; so hat man weiter nichts zu thun, als statt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die betreffenden Ausdrücke in 14) zu substituiren. Dadurch ergibt sich eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, deren allgemeines Urintegral mit zwei Integrations-Constanten versehen sein muss. Durch ein mit zwei Integrations-Constanten versehenes Urintegral sind aber jedesmal unendlich viele Curven-Schaaren dargestellt. Es ist jedoch, wie später nachgewiesen werden wird, keine einzige von allen diesen Curven so beschaffen, dass sie mehr als einen einzigen Punkt der vorgeschriebenen Brennlinien erzeugen könnte. Desshalb muss man sich noch umschauen, ob von den durch das allgemeine Urintegral dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren auch Gränz-Curven erzeugt werden; und diese sind alsdann die gesuchten Reflexions- oder Refractions-Curven. Die Gränz-Curven selbst sind aber von zweierlei Art, je nachdem sie mit ihren Erzeugungs-Curven eine Berührung von ungrader oder eine Berührung von grader Ordnung eingehen.

Wenn eine Gränz-Curve mit ihren Erzeugungs-Curven eine Berührung ungrader Ordnung eingeht, dann liegen die Erzeugungs-Curven mit allen ihren Punkten auf der nämlichen Seite der Gränz-Curve; und desshalb wird jede Gränz-Curve ungrader Ordnung eine einhüllende oder umfangende Curve, und die Erzeugungs-Curven selbst werden die eingehüllten oder umfangenen Curven genannt.

Wenn aber eine Gränz-Curve mit ihren Erzeugungs-Curven eine Berührung grader Ordnung eingeht, dann wird die Gränz-Curve von den Erzeugungs-Curven im Berührungspunkte geschnitten; und desshalb kommt einer Gränz-Curve grader Ordnung nicht die Eigenschaft einer einhüllenden Curve zu.

Weil nun die gesuchten Reflexions- und Refractions-Curven jedesmal einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen, so müssen dieselben auch Gränz-Curven der zweiten Ordnung sein, während die zugehörigen Brennlinien, wie schon (in §. 1) auseinander gesetzt wurde, nur Gränz-Curven der ersten Ordnung sind.

Das Problem der Brennlinien ist also dem Evolutionsproblem analog; denn auch die Evolventen sind Gränz-Curven der zweiten, und die Evoluten sind Gränz-Curven der ersten Ordnung.

## Schluss der Einleitung.

Die Reflexions- und Refractions-Curven werden, wie man später sehen wird, durch einfach singuläre Integrale dargestellt. Man kann aber die einfach singulären Integrale, welche den Total-Differentialgleichungen zweiter Ordnung angehören, jedesmal durch drei verschiedene Hülfsmittel aufsuchen; nämlich:

1. mittels des (mit zwei Integrations-Constanten versehenen) allgemeinen Urintegrals;
2. mittels einer jeden der (mit nur einem Integrations-Constanten versehenen) zwei ersten Stammgleichungen; und
3. mittels der ursprünglichen Total-Differentialgleichung zweiter Ordnung.

So verschieden aber auch die Formen der durch diese dreierlei Hülfsmittel erlangten Resultate sein mögen, so sind doch die allen diesen Formen entsprechenden Resultate ihrem Wesen nach ganz gleichbedeutend, und jedesmal kann die eine Form in die andere umgesetzt werden.

Schaut man nun vorwärts auf die Gleichungen 44), 177), 229), 373), wo sich diejenigen Formen befinden, welche für die einfach singulären Integrale aus dem allgemeinen Urintegral gewonnen werden; so erkennt man, dass ich mein Problem auf eine einfache Rectification der vorgeschriebenen Katakaustika oder Diakaustika zurückgeführt habe. Die Einfachheit und Allgemeinheit meiner Lösung lässt also nichts zu wünschen übrig.

Um jetzt die vorliegende Abhandlung systematisch durchzuführen, mag sie in zwei Abtheilungen gebracht werden, deren erste sich mit Bestimmung der Reflexions-Curven, und deren zweite sich mit Bestimmung der Refractions-Curven befasst. Jede dieser beiden Abtheilungen zerfällt aber von selbst wieder in zwei Abschnitte, je nachdem die urspünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen.

# ERSTE ABTHEILUNG.

Bestimmung der Reflexions-Curven, während die Katakaustika vorgeschrieben ist.

---

## Erster Abschnitt.

Bestimmung der Reflexions-Curven für parallele Lichtstrahlen.

§. 5.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in einen einzigen Punkt (Brennpunkt) concentrirt.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Reflexions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel ist; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichungen 2) und 3) bezüglich in

$$15)\qquad \mathfrak{g} = x + (u - p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$16)\qquad \mathfrak{h} = y + u.(u - p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft. Gleichung 15) lässt sich umsetzen in

$$(x - \mathfrak{g}) \cdot du + u \cdot dx - dy = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$17)\qquad (x - \mathfrak{g}) \cdot u - y + A = 0$$

wo $A$ ein Integrations-Constanter ist. Man hat nun allerdings die erste Stammgleichung zu Gleichung 15); ob jedoch Gleichung 17) auch der 16) genügt, muss noch besonders nachgewiesen werden. Aus 17) folgt

$$y = A + (x - \mathfrak{g}) \cdot u$$

und

$$p = u + (x - \mathfrak{g}) \cdot \frac{du}{dx}$$

und wenn man für $y$ und $p$ die hier hergestellten Ausdrücke substituirt, so reducirt Gleichung 16) sich auf

$$18)\qquad \mathfrak{h} = A$$

so dass 17) übergeht in

$$19)\qquad y - \mathfrak{h} = (x - \mathfrak{g}) \cdot u$$

Hiermit hat man eine erste Stammgleichung, welche jetzt, nachdem der Integrations-Constante $A$ den besonderen Werth $\mathfrak{h}$ angenommen hat, wirklich so beschaffen ist, dass sie den beiden Differentialgleichungen 15) und 16) zugleich genügt.

Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für $u$ den Ausdruck 4) zurückführen; und dabei geht 19) über in

$$20)\qquad (y-\mathfrak{h}) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-\mathfrak{g}) \cdot p = (y-\mathfrak{h})$$

Man multiplicire bei dieser Gleichung alle Theilsätze mit $(y-\mathfrak{h})$, und addire sodann beiderseits das Quadrat $(x-\mathfrak{g})^2$; so bekommt man

$$\big((y-\mathfrak{h}) \cdot p + (x-\mathfrak{g})\big)^2 = (y-\mathfrak{h})^2 + (x-\mathfrak{g})^2$$

oder

$$\pm \frac{(y-\mathfrak{h}) \cdot p + (x-\mathfrak{g})}{\sqrt{(y-\mathfrak{h})^2 + (x-\mathfrak{g})^2}} = 1$$

Daraus folgt durch Integration

$$21)\qquad \pm \sqrt{(y-\mathfrak{h})^2 + (x-\mathfrak{g})^2} = x + E$$

oder

$$22)\qquad (y-\mathfrak{h})^2 = 2 \cdot (\mathfrak{g} + E) \cdot \left(x - \frac{\mathfrak{g}-E}{2}\right)$$

Das Urintegral ist also diesmal nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen; denn der erste Integrations-Constante $A$ hat, damit den beiden Differentialgleichungen 15) und 16) zugleich genügt wird, den besonderen Werth $\mathfrak{h}$ angenommen.

Die durch 22) dargestellte Curvenreihe besteht aus konischen Parabeln, deren Parameter $= 2 \cdot (\mathfrak{g} + E)$ ist, deren Scheitel bestimmt wird durch $y = \mathfrak{h}$ und $x = \frac{\mathfrak{g}-E}{2}$, und deren Hauptaxe in der Entfernung $y = \mathfrak{h}$ mit der Abscissenaxe parallel läuft. Nun ist bei jeder konischen Parabel die Brennweite gleich dem vierten Theile des Parameters, d. h. gleich $\frac{\mathfrak{g}+E}{2}$; und somit ist $\frac{\mathfrak{g}-E}{2} + \frac{\mathfrak{g}+E}{2}$ oder $\mathfrak{g}$ die Entfernung des Brennpunktes von der Ordinatenaxe. Alle durch 22) dargestellten unendlich vielen Parabeln haben also den durch die festen Coordinaten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ vorgeschriebenen Brennpunkt mit einander gemein, d. h. von allen diesen unendlich vielen Parabeln werden die Lichtstrahlen, welche in einer mit der Hauptaxe parallelen Richtung eintreffen, nach einem und demselben Brennpunkte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ reflectirt.

## §. 6.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Katakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel läuft; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Katakaustika die bestimmte Gleichung

$$23)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

ergibt, so hat man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Ausdrücke 2) und 3) einzuführen, und man bekommt für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$24)\qquad \mathfrak{F}\left\{\left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right), \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)\right\} = 0$$

Um das Verfahren bequem fortführen zu können, setze man

$$M \text{ anstatt } x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

und

$$N \text{ anstatt } y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}$$

Dabei kürzt Gleichung 24) sich ab in

$$25) \qquad \mathfrak{F}(M, N) = 0$$

und wenn man nach allen $x$ differentiirt, so bekommt man

$$26) \qquad \left(\frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN}\right) \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2}\right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$27) \qquad 2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

oder wenn

$$28) \qquad \frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN} = 0$$

Die Differentialgleichung 27), welche von der dritten Ordnung ist, und aus welcher das der vorgelegten Differentialgleichung 24) entsprechende allgemeine Urintegral gewonnen wird, lässt sich ohne weiters integriren, und liefert

$$29) \qquad x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = A$$

wo $A$ ein Integrations-Constanter ist. Dabei geht Gleichung 24) über in

$$30) \qquad \mathfrak{F}\left\{A, \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)\right\} = 0$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass der Ausdruck $\left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)$ einen von $x$ und von $y$ unabhängigen Werth hat; und wenn man diesen Werth mit $B$ bezeichnet, so bekommt man

$$31) \qquad y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = B$$

während zwischen $A$ und $B$ die ganz bestimmte Gleichung

$$32) \qquad \mathfrak{F}(A, B) = 0$$

stattfindet. Wenn man Gleichung 29) mit $u$ multiplicirt, und das sich ergebende Product von 31) subtrahirt; so bleibt

$$33) \qquad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

Hiermit hat man eine erste Stammgleichung, in welcher zwar zwei Integrations-Constanten $A$ und $B$ vorkommen; weil aber $A$ und $B$ in der durch 32) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ aus 33) eliminiren, und eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten herstellen.

Um nun die Gleichung 33) weiter behandeln zu können, muss man für $u$ den Ausdruck 4) zurückführen; und dabei geht 33) über in

$$34) \qquad (y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie im vorigen Paragraph mit Gleichung 20); so bekommt man das Urintegral

$$35) \qquad \pm\sqrt{(y-B)^2+(x-A)^2}=x+E$$

Hier erscheinen sogar drei Integrations-Constanten $A$, $B$, $E$, während die vorgelegte Differentialgleichung 24) nur eine von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch $A$ und $B$ in der durch 32) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ eliminiren, und eine Urgleichung mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 23) und 32) mit einander, so erkennt man, dass zwischen $A$ und $B$ dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Man kann also statt der Integrations-Constanten $A$ und $B$ auch die zur vorgeschriebenen Katakaustika gehörigen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ setzen; und dabei geht 35) über in

$$36) \qquad \pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2}=x+E$$

oder, wenn man umformt, in

$$37) \qquad (y-\mathfrak{y})^2=2\cdot(\mathfrak{x}+E)\cdot\left(x-\tfrac{\mathfrak{x}-E}{2}\right)$$

Alle hierdurch dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen sonach aus konischen Parabeln, deren Parameter $=2\cdot(\mathfrak{x}+E)$ sind, deren Scheitel bestimmt werden durch $y=\mathfrak{y}$ und $x=\frac{\mathfrak{x}-E}{2}$, und deren Hauptaxen in der Entfernung $y=\mathfrak{y}$ mit der allen durch 37) dargestellten Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen. Nun ist bei jeder konischen Parabel die Brennweite gleich dem vierten Theile des Parameters, d. h. gleich $\frac{\mathfrak{x}+E}{2}$; und somit ist $\frac{\mathfrak{x}-E}{2}+\frac{\mathfrak{x}+E}{2}$ oder $\mathfrak{x}$ die Entfernung des Brennpunktes von der Ordinatenaxe, und der Brennpunkt selbst hat die Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, d. h. alle Brennpunkte der hier gefundenen unendlich vielen Parabel-Schaaren liegen in der vorgeschriebenen Katakaustika.

Es trifft sich, wie am Schlusse des §. 5 auseinander gesetzt ist, bei jeder konischen Parabel, dass, sobald die Lichtstrahlen parallel mit der Hauptaxe auffallen, die Katakaustika sich in den Brennpunkt zusammenzieht. Wählt man also im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika irgend einen Punkt, und zieht man durch diesen eine mit den Lichtstrahlen parallele Grade; so sind alle unendlich vielen konischen Parabeln, denen der eben besagte Punkt als Brennpunkt und die eben besagte Grade als Hauptaxe zukommt, so beschaffen, dass sie die mit der Hauptaxe parallel eintreffenden Lichtstrahlen nach dem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika) gewählten Punkte reflectiren. Geht man zu einem zweiten (unmittelbar anliegenden) Punkte im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika über, und zieht man durch diesen zweiten Punkt wiederum eine mit den Lichtstrahlen parallele Grade; so sind alle unendlich vielen konischen Parabeln, denen dieser zweite Punkt als Brennpunkt und diese zweite Grade als Hauptaxe zukommt, ebenfalls so beschaffen, dass sie die mit der Hauptaxe parallel eintreffenden Lichtstrahlen nach dem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika) gewählten zweiten Punkte reflectiren. Und so fort.

Desshalb ist unter den gefundenen Parabeln keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige dieser Parabeln ist die gesuchte Reflexions-Curve. Man muss daher untersuchen, ob unter diesen unendlich vielen Parabel-Schaaren solche Reihen stetig neben einander liegender Parabeln vorkommen, die sich so schneiden, dass die dadurch entstandenen Durchschnittslinien auch noch der vorgelegten Differentialgleichung 24) genügen. Weil aber diese Differentialgleichung eine der zweiten Ordnung ist, so muss jede Durchschnittslinie (§. 4) eine solche Gränz-Curve sein, welche in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Parabeln eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. Die Gränz-Curven der zweiten Ordnung werden aber, wie in der analytischen Geometrie noch näher nachgewiesen werden muss, durch das einfach singuläre[1]) Urintegral dargestellt; und dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Urintegral aus dem allgemeinen ableiten will, so ist dessen in Gleichung 36) aufgestellte Form die bequemste. Nun beachte man, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Parabeln; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 36) differentiirt, so bekommt man

$$38) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-\mathfrak{x}) \pm \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2}}{(y-\mathfrak{y})}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 36) nach allem $x$ differentiirt, so bekommt man weiter

$$39) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-\mathfrak{x}) \pm \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2}}{(y-\mathfrak{y})} + \frac{(y-\mathfrak{y})\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})}{(y-\mathfrak{y})} \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \pm \frac{\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2}}{(y-\mathfrak{y})} \cdot \frac{dE}{dx}$$

Damit aber aus 38) und 39) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$40) \qquad \left((y-\mathfrak{y})\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})\right)\cdot\frac{d\mathfrak{x}}{dx} \pm \left(\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2}\right)\cdot\frac{dE}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man die Gleichung 38) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in $y$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ enthaltenen $x$; so bekommt man neben der Gleichung 40) auch noch

$$41) \qquad \left((x-\mathfrak{x}) \mp \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2}\right)\cdot\left((y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)\cdot\frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$42) \qquad (y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

und hiermit wird diejenige Grade dargestellt, welche durch den Punkt $(x, y)$ der gesuchten Reflexions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der vorgeschriebenen Katakaustika gehörige Tangente ist. Jede Katakaustika ist ja, wie schon (in §. 1) auseinander gesetzt wurde, eine einhüllende Gränzcurve.

Eliminirt man jetzt mittels 42) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 40), so fällt auch die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg; und 40) geht über in

$$\left(d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2\right) \pm \left(\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}\right)\cdot dE = 0$$

oder in

$$\left(\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}\right) \pm dE = 0$$

[1]) Die singulären Integrale, welche einer Differentialgleichung zweiter Ordnung angehören, sind entweder einfach singuläre oder zweifach singuläre.

Daraus folgt

$$dE = \mp \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

oder

43) $$E = K \mp \int \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

wo $K$ ein Integrations-Constanter ist. Gleichung 36) geht also über in

44) $$\pm \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{x})^2} = x + K \mp \int \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

Mit dieser Gleichung muss man aber noch folgende drei

42) $$(y - \mathfrak{y}) - (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

23) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

45) $$\frac{d_{\mathfrak{x}}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{x}} + \frac{d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{y}} \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

verbinden, d. h. man muss die in 44) angezeigte Integration ausführen, und sodann die drei Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{y}$ eliminiren. Dabei fällt auch $d\mathfrak{x}$ mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ und dem Integrations-Constanten $K$. Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 24); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integral kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von $x$ und $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Parabeln; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 33) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass $u$ diesmal weiter nichts als ein mit $p$ versehener Ausdruck ist; so bekommt man

46) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{(u-p)}{(x-A) \cdot \frac{du}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser Beziehung die Gleichung 33) nach allen $x$ differentiirt, so bekommt man weiter

47) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{(u-p)}{(x-A) \cdot \frac{du}{dp}} - \frac{\frac{dB}{dA} - u}{(x-A) \cdot \frac{du}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 46) und 47) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

48) $$\frac{dB}{dA} - u = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 32) die Differentialgleichung

49) $$\frac{d_A\mathfrak{F}}{dA} + \frac{d_B\mathfrak{F}}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 32), 33), 48), 49) die drei Bestandtheile $A$, $B$, $\frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

50) $$y - u \cdot x = \phi(u)$$

wo die Form des Ausdruckes $\phi(u)$ abhängig ist von $\mathfrak{F}(A, B) = 0$. Hier hat man für $u$ noch den Ausdruek $\frac{2.p}{1-p^2}$ zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit $x$, $y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 28), d. h. die Gleichung

$$28) \qquad \frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 24) und 28) zugleich erfüllt werden. Die so aufgesuchte Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 50) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit $x$, $y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehene Urgleichung ergibt, wie bei der ersten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode in §. 7, §. 8, §. 9.)

## §. 7.

**Beispiel 1.** Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

$$51) \qquad \mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$52) \qquad \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^3 = h \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$53) \quad \left[3u \cdot \left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^2 - 2h \cdot \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)\right] \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$54) \qquad 2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 6) die den beiden Differentialgleichungen 52) und 54) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$55) \qquad B^3 = h \cdot A^2$$

und

$$56) \qquad (y-B) = (x-A) \cdot u$$

Jetzt substituire man für $u$ den Ausdruck $\frac{2.p}{1-p^2}$ in 56), so bekommt man

$$(y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$57)\qquad B^3 = h \,.\, A^2$$

und

$$58)\qquad \pm\sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$59)\qquad \mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$$

und

$$60)\qquad \pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren Brennpunkte in der durch die Gleichung $\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$ vorgeschriebenen Katakaustika liegen.

Nun sind die Reflexions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon im §. 6 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so specialisiren sich die (in §. 6 aufgestellten) zwei Gleichungen 42) und 44) diesmal in

$$61)\qquad (y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{2h.\mathfrak{x}}{3.\mathfrak{y}^2} = 0$$

und

$$62)\qquad \pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + K \mp \frac{1}{27} \,.\, \sqrt{(4 \,.\, h^{\frac{2}{3}} + 9 \,.\, \mathfrak{x}^{\frac{2}{3}})^3}$$

Nun ist

$$\frac{2h.\mathfrak{x}}{3.\mathfrak{y}^2} = \frac{2h.\mathfrak{x}^2}{3.\mathfrak{x}.\mathfrak{y}^2} = \frac{2.\mathfrak{y}^3}{3.\mathfrak{x}.\mathfrak{y}^2} = \frac{2.\mathfrak{y}}{3.\mathfrak{x}}$$

und somit setzt Gleichung 61) sich um in

$$63)\qquad (y-\mathfrak{y}) - (y-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{2.\mathfrak{y}}{3.\mathfrak{x}} = 0$$

Ferner ist

$$\sqrt{(4 \,.\, h^{\frac{2}{3}} + 9 \,.\, \mathfrak{x}^{\frac{2}{3}})^3} = \frac{\sqrt{\left(4\,.(h.\mathfrak{x}^2)^{\frac{2}{3}} + 9.\mathfrak{x}^2\right)^3}}{\mathfrak{x}^2} = \frac{\sqrt{(4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2)^3}}{\mathfrak{x}^2}$$

somit setzt Gleichung 62) sich um in

$$64)\qquad \pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + K \mp \frac{\sqrt{(4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2)^3}}{27.\mathfrak{x}^2}$$

Wenn man zuerst die Differenz $(y-\mathfrak{y})$, und hierauf die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ aus 63) und aus 64) eliminirt, so bekommt man bezüglich

$$65)\qquad \frac{-3\mathfrak{x} \pm \sqrt{4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2}}{3\mathfrak{x}} \,.\, x = K \mp \frac{4.h}{27.\mathfrak{y}} \,.\, \sqrt{4 \,.\, \mathfrak{y}^2 + 9 \,.\, \mathfrak{x}^2}$$

und

$$66)\qquad \frac{-3\mathfrak{x} \pm \sqrt{4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2}}{2\mathfrak{y}} \,.\, y = K - \frac{\mathfrak{x}}{2} \pm \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) \,.\, \sqrt{4 \,.\, \mathfrak{y}^2 + 9 \,.\, \mathfrak{x}^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 51), 65), 66) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 51) und 65) entweder das $\mathfrak{x}$ oder das $\mathfrak{y}$ eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{y}$ und im zweiten Falle das $\mathfrak{x}$ als Function von $x$ und $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 51), 65), 66) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will; so muss man die zwei Gleichungen 55) und 56) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 50) in

$$67)\qquad y - u \,.\, x = \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 67) auch die 52) erfüllt wird, und ob das zu 67) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 67) aber folgt der Reihe nach

$$68)\qquad y = u \,.\, x + \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$69)\qquad p = u + \left(x - \frac{8h}{27} \cdot \frac{1}{u^3}\right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$70)\qquad \frac{dp}{dx} = 2 \cdot \frac{du}{dx} + \frac{8h}{9 \,.\, u^4} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(x - \frac{8h}{27 \,.\, u^3}\right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

Wenn man die hier für $y$ und $p$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 52) einsetzt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 52) wird von dem zu 67) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für $p$ und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 54) einsetzt, so reducirt sich diese auf

$$71)\qquad -\frac{8 \,.\, h}{9 \,.\, u^4} \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

Letztere Gleichung trägt aber einen Widerspruch in sich selbst; und somit ist man überzeugt, dass das zu 67) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres zu der vorgelegten Differentialgleichung 52) ist. Um jedoch Gleichung 67) weiter behandeln zu können, muss man für $u$ den Ausdruck $\frac{2 \,.\, p}{1 - p^2}$ zurückführen; und dabei geht 67) über in

$$72)\qquad y - \frac{2p}{1-p^2} \cdot x = \frac{h}{27} \cdot \frac{(1-p^2)^2}{p^2}$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$p - \frac{2p}{1-p^2} - \frac{2 \,.\, (1+p^2) \,.\, x}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = -\frac{2h}{27} \cdot \frac{(1+p^2) \,.\, (1-p^2)}{p^3} \cdot \frac{dp}{dx}$$

oder, indem man die beiden ersten Theilsätze in einen zusammenzieht, und alsdann alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt,

$$\frac{p \,.\, (1+p^2)}{1-p^2} + \frac{2 \,.\, (1+p^2) \,.\, x}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{2h}{27} \cdot \frac{(1+p^2) \,.\, (1-p^2)}{p^3} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Der integrirende Factor dieser Gleichung ist $\frac{p}{1+p^2}$; denn dabei geht sie über in

$$\frac{p^2}{1-p^2}+\frac{2p.x}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{2h}{27}\cdot\left(\frac{1}{p^2}-1\right)\cdot\frac{dp}{dx}$$

Daraus folgt durch Integration

73) $$\frac{p^2}{1-p^2}\,.\,x=L-\frac{2h}{27}\cdot\frac{1+p^2}{p}$$

und wenn man $x$ aus 72) und 73) eliminirt, so bekommt man weiter

74) $$p\cdot y=2L-\frac{4h}{27}\cdot\frac{1+p^2}{p}+\frac{h}{27}\cdot\frac{(1-p^2)^2}{p}$$

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 73) und 74) hat man, wegen des Integrations-Constanten $L$, abermals eine Reihe stetig auf einander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{y}^3=h\,.\,\mathfrak{x}^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $p$ ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung der beiden Gleichungen 73) und 74) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 65) und 66); davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

In Folge der drei Gleichungen 38), 39), 40) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $E$ von $x$ unabhängig oder von $x$ abhängig sein, der für $p$ hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf folgende Form

75) $$p=\frac{-(x-\mathfrak{x})\pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2}}{(y-\mathfrak{y})}$$

reducirt; und wenn man aus 63) und 75) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ eliminirt, so fällt auch $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg, d. h. Gleichung 75) geht über in

76) $$p=\frac{-3.\mathfrak{x}\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{2.\mathfrak{y}}$$

Daraus folgt weiter

77) $$\frac{p^2}{1-p^2}=\frac{-3.\mathfrak{x}\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{6.\mathfrak{x}}$$

78) $$\frac{1+p^2}{p}=\frac{\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{\mathfrak{y}}$$

79) $$\frac{(1-p^2)^2}{p}=\frac{9.\mathfrak{x}^2.\left(-3\mathfrak{x}\pm\sqrt{4\,\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}\right)}{2\,.\,\mathfrak{y}^3}=\frac{9.\left(-3\mathfrak{x}\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}\right)}{2.h}$$

Nun substituire man die für $\frac{p^2}{1-p^2}$ und für $\frac{1+p^2}{p}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 73), so geht sie über in

$$\frac{-3.\mathfrak{x}\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{6.\mathfrak{x}}\,.\,x=L\mp\frac{2h}{27\cdot\mathfrak{y}}\,.\,\sqrt{4\,.\,\mathfrak{y}^2+9\,.\,\mathfrak{x}^2}$$

oder, wenn man Alles mit 2 multiplicirt, in

80) $$\frac{-3.\mathfrak{x}\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{3.\mathfrak{x}}\,.\,x=2L\mp\frac{4\cdot h}{27\cdot\mathfrak{y}}\,.\,\sqrt{4\,.\,\mathfrak{y}^2+9\,.\,\mathfrak{x}^2}.$$

Ebenso geht, durch die gehörigen Substitutionen, Gleichung 74) über in

81) $$\frac{-3.\mathfrak{x}\pm\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{2.\mathfrak{y}}\,.\,y=2L-\frac{\mathfrak{x}}{2}\pm\left(\frac{1}{6}-\frac{4h}{27.\mathfrak{y}}\right)\,.\,\sqrt{4\,.\,\mathfrak{y}^2+9\,.\,\mathfrak{x}^2}.$$

Wenn man hier noch $K$ statt $2L$ setzt, so fallen die Gleichungen 80) und 81) genau mit 65) und 66) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 53) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$82)\qquad 3\,.\,u\,.\,\left(y+u\,.\,(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}\right)^2=2h\,.\left(x+(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}\right)$$

gelten lässt. Man dividire mit 52) in 82), so gibt sich

$$3\,.\,u\,.\,\left(x+(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}\right)=2\,.\,\left(y+u\,.\,(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}\right)$$

oder

$$83)\qquad u\,.\,(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}=2\,.\,y-3u\,.\,x$$

Jetzt eliminire man $\frac{dx}{du}$ aus 52) und 83), so gibt sich weiter

$$84)\qquad 27\,.\,(y-ux)^3=\frac{4\,.\,h}{u^2}\,.\,(y-ux)^2$$

oder

$$85)\qquad y-ux=\frac{4\,.\,h}{27}\,.\,\frac{1}{u^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 85) auch den beiden Gleichungen 52) und 82) zugleich genügt wird, und ob das zu 85) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Weil aber Gleichung 85) dieselbe ist, wie 67); so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode, wie bei der zweiten.

## §. 8.

**Beispiel 2.** Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

$$86)\qquad \mathfrak{y}^2=2h\,.\,\mathfrak{x}$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$87)\qquad \left(y+u\,.\,(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}\right)^2=2h\,.\left(x+(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}\right)$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$88)\qquad \left(u\,.\,y+u^2\,.\,(u-p)\,.\,\frac{dx}{du}-h\right)\,.\,\left(2-\frac{dp}{dx}\,.\,\frac{dx}{du}-(u-p)\,.\,\frac{d^2u}{du^2}\right)=0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$89)\qquad 2-\frac{dp}{dx}\,.\,\frac{dx}{du}-(u-p)\,.\,\frac{d^2u}{du^2}=0$$

gelten; so ist (nach §. 6) die den beiden Differentialgleichungen 87) und 89) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$90)\qquad B^2=2h\,.\,A$$

und

$$91)\qquad (y-B)=(x-A)\,.\,u$$

Jetzt substituire man für $u$ den Ausdruck $\frac{2 . p}{1-p^2}$ in Gleichung 91), so geht diese über in

92) $$(y-B) \,.\, p^2 + 2 \,.\, (x-A) \,.\, p = (y-B)$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfahrt, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

93) $$B^2 = 2h \,.\, A$$

und

94) $$\pm\sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

95) $$\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$$

und

96) $$\pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren Brennpunkte in der durch die Gleichung $\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$ vorgeschriebenen Katakaustika liegen.

Nun sind die Reflexions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon in §. 6 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so beachte man vorerst, dass

$$\pm\int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2} = \pm\int\frac{\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h} \,.\, d\mathfrak{y}$$

$$= \pm\,\frac{\mathfrak{y} \,.\, \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2 \,.\, h} + \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\left(\frac{\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

$$= \pm\,\frac{\mathfrak{y} \,.\, \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2 \,.\, h} - \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\left(\frac{h}{\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}\right)$$

$$= \pm\,\frac{\mathfrak{y} \,.\, \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2 \,.\, h} - \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

ist. Hier gehören durchweg die oberen Zeichen zusammen, und ebenso die unteren; und es specialisiren die (in §. 6 aufgestellten) zwei Gleichungen 42) und 44) sich diesmal in

97) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{h}{\mathfrak{y}} = 0$$

und

98) $$\pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + K \mp \frac{\mathfrak{y} \,.\, \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2h} + \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

Eliminirt man zuerst die Differenz $(y-\mathfrak{y})$, und hierauf die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ aus 97) und 98); so bekommt man bezüglich

99) $$\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} \,.\, x = K + \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und

100) $$\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h} \,.\, y = K + \frac{\mathfrak{y} \,.\, (-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{2h} + \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 86), 99), 100) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 86) und 99) entweder das $\mathfrak{x}$ oder das $\mathfrak{y}$ eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{y}$ und im zweiten Falle das $\mathfrak{x}$ als Function von $x$ und $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 86), 99), 100) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 90) und 91) zu Hilfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 50) in

$$101) \qquad y - u \,.\, x = \frac{h}{2} \,.\, \frac{1}{u}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 101) auch die 87) erfüllt wird, und ob das zu 101) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 101) aber folgt der Reihe nach

$$102) \qquad y = u \,.\, x + \frac{h}{2} \,.\, \frac{1}{u}$$

$$103) \qquad p = u + \left(x - \frac{h}{2} \,.\, \frac{1}{u^2}\right) . \frac{du}{dx}$$

$$104) \qquad \frac{dp}{dx} = 2 \,.\, \frac{du}{dx} + h \,.\, \frac{1}{u^3} \,.\, \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(x - \frac{h}{2} \,.\, \frac{1}{u^2}\right) . \frac{d^2u}{dx^2}$$

Wenn man die hier für $y$ und $p$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 87) einsetzt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 87) wird von dem zu 101) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für $p$ und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 89) substituirt, so reducirt sich diese auf

$$105) \qquad -\frac{h}{u^3} \,.\, \frac{du}{dx} = 0$$

Letztere Gleichung trägt aber einen Widerspruch in sich selbst; und somit ist man überzeugt, dass das zu 101) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres zu der vorgelegten Differentialgleichung 87) ist. Um jedoch Gleichung 101) weiter behandeln zu können, muss man für $u$ den Ausdruck $\frac{2 \,.\, p}{1-p^2}$ zurückführen; und dabei geht 101) über in

$$106) \qquad y - \frac{2p}{1-p^2}\, x = \frac{h}{4} \,.\, \frac{1-p^2}{p}$$

oder, wenn man differentiirt, sodann die beiden ersten Theilsätze in einen zusammenzieht, und zuletzt Alles mit $\frac{p}{1+p^2}$ multiplicirt,

$$107) \qquad \frac{p^2}{1-p^2} + \frac{2p \,.\, x}{(1-p^2)^2} \,.\, \frac{dp}{dx} = \frac{h}{4} \,.\, \frac{1}{p} \,.\, \frac{dp}{dx}$$

Daraus folgt durch Integration

$$108) \qquad \frac{p^2}{1-p^2} \,.\, x = L + \frac{h}{4} \,.\, \mathrm{lgnat}\, p$$

und wenn man $x$ aus 106) und 108) eliminirt, so bekommt man weiter

$$109) \qquad p \,.\, y = 2L + \frac{h}{4} \,.\, (1-p^2) + \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\, p$$

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 108) und 109) hat man, wegen des Integrations-Constanten $L$, abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $p$ ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung der beiden Gleichungen 108) und 109) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 99) und 100); davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

In Folge der drei Gleichungen 38), 39), 40) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $E$ von $x$ unabhängig oder von $x$ abhängig sein. der für $p$ hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf folgende Form

110) $$p = \frac{-(x-\mathfrak{x}) \pm \sqrt{(\mathfrak{y}-y)^2 + (x-\mathfrak{x})^2}}{(y-\mathfrak{y})}$$

reducirt; und wenn man aus 97) und 110) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ eliminirt, so fällt auch $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg, d. h. Gleichung 110) geht über in

111) $$p = \frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}$$

Daraus folgt weiter

112) $$1 - p^2 = \frac{2\mathfrak{y} \,.\, (-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{h^2}$$

und

113) $$\frac{p^2}{1-p^2} = \frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2\mathfrak{y}}$$

Nun substituire man die für $p$ und $\frac{p^2}{1-p^2}$ hergestellten Ausdrücke in die Gleichung 108), so bekommt man

$$\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2\mathfrak{y}} \,.\, x = L + \frac{h}{4} \,.\, \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

oder, wenn man Alles mit 2 multiplicirt,

114) $$\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} \,.\, x = 2L + \frac{h}{2} \,.\, \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

Ebenso geht, durch die gehörigen Substitutionen, Gleichung 109) über in

115) $$\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h} \,.\, y = 2L + \frac{\mathfrak{y} \,.\, (-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{2h} + \frac{h}{2} \,.\, \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

Wenn man hier noch $K$ statt $2L$ setzt, so fallen die Gleichungen 114) und 115) genau mit 99) und 100) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 88) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

116) $$u \,.\, y + u^2 \,.\, (u-p) \,.\, \frac{dx}{du} - h = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

117) $$(u-p) \,.\, \frac{dx}{du} = \frac{h-u \,.\, y}{u^2}$$

und wenn man diesen für $(u-p) \cdot \frac{dx}{du}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 87) substituirt, so geht diese über in

$$\left(\frac{h}{u}\right)^2 = 2h \cdot \frac{u \cdot (ux-y) + h}{u^2}$$

und daraus folgt weiter

118) $$y - ux = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{u}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 118) auch den beiden Gleichungen 87) und 116) zugleich genügt wird, und ob das zu 118) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Weil aber Gleichung 118) dieselbe ist, wie 101); so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode, wie bei der zweiten.

§. 9.

**Beispiel 3.** Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

119) $$\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{x}^2 = k^2$$

vorgeschriebene Kreislinie ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

120) $$\left(y + u \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^2 + \left(x + (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right)^2 = k^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

121) $$\left(u \cdot y + x + (1+u^2) \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du}\right) \cdot \left(2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

122) $$2 - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - (u-p) \cdot \frac{d^2u}{du^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 6) die den beiden Differentialgleichungen 120) und 122) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

123) $$B^2 + A^2 = k^2$$

und

124) $$(y-B) = (x-A) \cdot u$$

Jetzt substituire man für $u$ den Ausdruck $\frac{2 \cdot p}{1-p^2}$ in 124), so bekommt man

$$(y-B) \cdot p^2 + 2 \cdot (x-A) \cdot p = (y-B)$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter vorfährt, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

125) $$B^2 + A^2 = k^2$$

und

126) $$\pm \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$127)\qquad \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{x}^2 = k^2$$

und

$$128)\qquad \pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Parabeln gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren Brennpunkte in der durch die Gleichung $\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{x}^2 = k^2$ vorgeschriebenen Kreislinie liegen.

Nun sind die Reflexions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon in §. 6 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so beachte man vorerst, dass

$$\int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2} = k \,.\int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{k^2-\mathfrak{x}^2}}$$

$$= k \,.\, \arcsin\frac{\mathfrak{x}}{k} = k \,.\, \arccos\frac{\mathfrak{y}}{k} = k \,.\, \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

ist; und so specialisiren sich die in §. 6 aufgestellten zwei Gleichungen 42) und 44) diesmal in

$$129)\qquad (y-\mathfrak{y}) + (x-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = 0$$

und

$$130)\qquad \pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + K \mp k \,.\, \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Um nun das $x$ als Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auszudrücken, eliminire man die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 129) und 130); so bekommt man

$$131)\qquad \frac{\pm(x-\mathfrak{x})\,.\,\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} = x + K \mp k \,.\, \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Um ferner auch das $y$ als Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auszudrücken, addire man auf der rechten Seite der letzten Gleichung die identische Differenz $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x})$; so gibt sich zunächst

$$132)\qquad \frac{\pm(x-\mathfrak{x})\,.\,\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} = (x-\mathfrak{x}) + K + \mathfrak{x} \mp k \,.\, \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Nun folgt aus 129); dass

$$133)\qquad (x-\mathfrak{x}) = -(y-\mathfrak{y}) \,.\, \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$$

und wenn man jetzt die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ aus 132) eliminirt, so bekommt man weiter

$$134)\qquad \frac{\mp(y-\mathfrak{y})\,.\,\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{x}} = -(y-\mathfrak{y}) \,.\, \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} + K + \mathfrak{x} \mp k \,.\, \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Man kann aber, wegen Gleichung 119), auch $k$ statt $\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}$ setzen, und so kann man 131) und 134) auch umformen in

$$135)\qquad \frac{\pm k - \mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} \,.\, x = K \pm k \,.\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

und

$$136)\qquad \frac{\pm k - \mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \,.\, y = -K - \frac{k^2}{\mathfrak{x}} \pm k \,.\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 119), 135), 136) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die urspzünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen. die vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 119) und 135) entweder das $\mathfrak{x}$ oder das $\mathfrak{y}$ eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{y}$ und im zweiten Falle das $\mathfrak{x}$ als Function von $x$ und $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 119), 135) und 136) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 123) und 124) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 50) in

$$137) \qquad y - u \, . \, x = \pm \, k \, . \, \sqrt{1 + u^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 137) auch die 120) erfüllt wird, und ob das zu 137) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 137) aber folgt der Reihe nach

$$y = u \, . \, x \pm k \, . \, \sqrt{1 + u^2}$$

$$p = u + \left(x \pm \frac{k \, . \, u}{\sqrt{1+u^2}}\right) . \, \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = 2 \, . \, \frac{du}{dx} + \left(x \pm \frac{k \, . \, u}{\sqrt{1+u^2}}\right) . \, \frac{d^2u}{dx^2} \pm \frac{k}{(\sqrt{1+u^2})^3} \, . \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

Wenn man die hier für $y$ und $p$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 120) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 120) wird von dem zu 137) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für $p$ und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 122) substituirt, so reducirt sich dieselbe auf

$$\mp \frac{k}{(\sqrt{1+u^2})^3} \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

und weil letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst trägt, so ist man überzeugt, dass das zu 137) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der Gleichung 122) ist. Um jedoch Gleichung 137) weiter behandeln zu können, muss man für $u$ den Ausdruck substituiren; und dabei setzt Gleichung 137) sich um in

$$138) \qquad y - \frac{2p}{1-p^2} \, . \, x = \pm \, k \, . \, \frac{1+p^2}{1-p^2}$$

oder, wenn man differentiirt, sodann die beiden ersten Theilsätze in einen zusammenzieht, hierauf alle Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt, und zuletzt Alles mit $\frac{p}{1+p^2}$ multiplicirt,

$$139) \qquad \frac{p^2}{1-p^2} + \frac{2p \, . \, x}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{dx} = \mp \, 4k \, . \, \frac{p}{(1-p^2)^2 \, . \, (1+p^2)} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Daraus folgt durch Integration

$$140) \qquad \frac{p^2}{1-p^2} \, . \, x = L \mp k \, . \left(\frac{p}{1-p^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} p\right)$$

und wenn man $x$ aus 138) und 140) eliminirt, so bekommt man weiter

141) $$p \,.\, y = 2L \mp k \,.\, (p - 2 \,.\, \mathrm{arc\,tg}\, p)$$

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 140) und 141) hat man, wegen des Integrations-Constanten $L$, abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{x}^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $p$ ausgedrückt sind, so können alle diese Reflexions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung der beiden Gleichungen 140) und 141) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der beiden Gleichungen 135) und 136); davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen:

In Folge der drei Gleichungen 38), 39), 40) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $E$ von $x$ unabhängig oder von $x$ abhängig sein, der für $p$ hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf

142) $$p = \frac{-(x-\mathfrak{x}) \pm \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2}}{(y-\mathfrak{y})}$$

reducirt. Nun folgt aus 129), dass

143) $$(y-\mathfrak{y}) = -(x-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

ist; und indem man mittels 143) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 142) entfernt, fällt auch $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg, und es bleibt nur

144) $$p = \frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{-\mathfrak{x}} = \frac{-\mathfrak{y} \pm k}{-\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \mp \frac{k}{\mathfrak{x}}$$

Daraus folgt weiter

145) $$1 - p^2 = \frac{2\mathfrak{y} \,.\, (-\mathfrak{y} \pm k)}{\mathfrak{x}^2}$$

und

146) $$\mathrm{arc\,tg}\, p = \frac{1}{2} \,.\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{2p}{1-p^2} = \frac{1}{2} \,.\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{-\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = -\frac{1}{2} \,.\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Nun substituire man die betreffenden Ausdrücke in 140), so bekommt man

$$\frac{-\mathfrak{y} \pm k}{2 \,.\, \mathfrak{y}} \,.\, x = L \mp k \,.\, \left(\frac{-\mathfrak{x}}{2 \,.\, \mathfrak{y}} + \frac{1}{2} \,.\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

oder, wenn man Alles mit 2 multiplicirt,

147) $$\frac{\pm k - \mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} \,.\, x = 2L \pm k \,.\, \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

Man substituire ebenso die betreffenden Ausdrücke in die Gleichung 141), so bekommt man weiter

$$\frac{-\mathfrak{y} \pm k}{-\mathfrak{x}} \,.\, y = 2L \mp k \,.\, \left(\frac{-\mathfrak{y} \pm k}{-\mathfrak{x}} + \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

oder

$$\frac{\mp k + \mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \,.\, y = 2L + \frac{k^2}{\mathfrak{x}} \mp k \,.\, \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} + \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

oder, mit Veränderung der Zeichen

148) $$\frac{\pm k - \mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \,.\, y = -2L - \frac{k^2}{\mathfrak{x}} \pm k \,.\, \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} + \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

Wenn man hier noch $K$ statt $2L$ setzt, so fallen die Gleichungen 147) und 148) genau mit 135) und 136) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 121) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$149)\qquad u \,.\, y + x + (1+u^2) \,.\, (u-p) \,.\, \frac{dx}{du} = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

$$150)\qquad (u-p) \,.\, \frac{dx}{du} = -\frac{u \,.\, y + x}{1 + u^2}$$

und wenn man diesen für $(u-p) \,.\, \frac{dx}{du}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 120) substituirt, so geht diese über in

$$\left(\frac{y - ux}{1+u^2}\right)^2 + \left(-\frac{u \,.\, (y-ux)}{1+u^2}\right)^2 = k^2$$

oder in

$$\frac{(y-ux)^2}{1+u^2} = k^2$$

und daraus folgt weiter

$$151)\qquad y - ux = \pm\, k \,.\, \sqrt{1 + u^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 151) auch den beiden Gleichungen 120) und 149) zugleich genügt, und ob das zu 151) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Weil aber Gleichung 151) dieselbe ist, wie Gleichung 137); so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode, wie bei der zweiten.

## Zweiter Abschnitt.

### Bestimmung der Reflexions-Curven für von einem leuchtenden Punkte herkommende Lichtstrahlen.

### §. 10.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in einen einzigen Punkt (Brennpunkt) zusammenzieht.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Reflexions-Curve so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichungen 2) und 3) bezüglich in

$$152)\qquad \mathfrak{g} = x + (u-p) \,.\, \frac{dx}{du}$$

und

$$153)\qquad \mathfrak{h} = y + u \,.\, (u-p) \,.\, \frac{dx}{du}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Das nächste Geschäft ist nun, eine erste Stammgleichung aufzusuchen, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt; und wenn man hier wie in §. 5 verfährt, so bekommt man

$$154)\qquad y - \mathfrak{h} = (x - \mathfrak{g}) \,.\, u$$

Diese erste Stammgleichung enthält keinen Integrations-Constanten; denn nur so kann sie, wie man bereits im §. 5 ersehen hat, den beiden vorgelegten Differentialgleichungen 152) und 153) zugleich genügen. Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für $u$ den in §. 2 befindlichen Ausdruck

$$\frac{2.(x-g).p-y.(1-p^2)}{2.y.p+(x-g).(1-p^2)}$$

in welchem durch $g$ die Abscisse des leuchtenden Punktes dargestellt ist, zurückführen. Dabei geht Gleichung 154) über in

$$155)\quad \Big((x-g)\cdot(y-\mathfrak{h})+(x-\mathfrak{g})\cdot y\Big)\cdot p^2+2\cdot\Big((x-g)\cdot(x-\mathfrak{g})-(y-\mathfrak{h})\cdot y\Big)\cdot p$$
$$-(x-g)\cdot(y-\mathfrak{h})-(x-\mathfrak{g})\cdot y=0$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $\Big((x-g)\cdot(y-\mathfrak{h})-(x-\mathfrak{g})\cdot y\Big)$, so gibt sich

$$156)\qquad \Big((x-g)^2\cdot(y-\mathfrak{h})^2-(x-\mathfrak{g})^2\cdot y^2\Big)\cdot p^2$$
$$+2\cdot\Big((x-g)^2\cdot(x-\mathfrak{g})\cdot(y-\mathfrak{h})-(x-g)\cdot(y-\mathfrak{h})^2\cdot y-(x-g)\cdot(x-\mathfrak{g})^2\cdot y+(x-\mathfrak{g})\cdot(y-\mathfrak{h})\cdot y^2\Big)\cdot p$$
$$-(x-g)^2\cdot(y-\mathfrak{h})^2+(x-\mathfrak{g})^2\cdot y^2=0$$

Man addire die beiden identischen Differenzen

$$(x-g)^2\cdot(x-\mathfrak{g})^2-(x-g)^2\cdot(x-\mathfrak{g})^2$$

und

$$(y-\mathfrak{h})^2\cdot y^2\cdot p^2-(y-\mathfrak{h})^2\cdot y^2\cdot p^2$$

so setzt Gleichung 156) sich um in

$$157)\ \Big((x-g)^2+y^2\Big)\cdot\Big((x-\mathfrak{g})+y-\mathfrak{h})\cdot p\Big)^2-\Big((x-\mathfrak{g})^2+(y-\mathfrak{h})^2\Big)\cdot\Big((x-g)+y\cdot p\Big)^2=0$$

Daraus folgt

$$158)\qquad \frac{(x-g)+y.p}{\sqrt{(x-g)^2+y^2}}\pm\frac{(x-\mathfrak{g})+(y-\mathfrak{h}).p}{\sqrt{(x-\mathfrak{g})^2+(y-\mathfrak{h})^2}}=0$$

und wenn man integrirt, so gibt sich

$$159)\qquad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\pm\sqrt{(x-\mathfrak{g})^2+(y-\mathfrak{h})^2}=G$$

Das den Differentialgleichungen 152) und 153) gemeinsame Urintegral ist also nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen. Die Ursache ist schon bei Gleichung 22) angemerkt.

Bei Gleichung 159) erkennt man, dass der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2+y^2}$ der vom leuchtenden Punkte, und dass der Ausdruck $\sqrt{(x-\mathfrak{g})^2+(y-\mathfrak{h})^2}$ der vom vorgeschriebenen Brennpunkte $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ nach irgend einem Punkte der gesuchten Reflexions-Curve gezogene Leitstrahl ist; und daraus folgt, dass, je nachdem man beim Doppelzeichen $\pm$ das obere oder untere gelten lässt, entweder die Summe oder der Unterschied der beiden Leitstrahlen gleich ist dem Integrations-Constanten $G$, d. h. die durch 159) dargestellte Curvenreihe besteht entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln, welchen allen die unveränderliche Excentricität $\sqrt{(\mathfrak{g}-g)^2+\mathfrak{h}^2}$ gemeinschaftlich ist. Nun hat man zu unterscheiden:

1. Bei den konischen Ellipsen wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Normale halbirt; und somit wird jeder von einem

Brennpunkte einer konischen Ellipse ausgehende Lichtstrahl nach dem anderen Brennpunkte reflectirt. Weil nun alle durch

$$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{(x-\mathfrak{g})^2+(y-\mathfrak{h})^2}=G$$

dargestellten Ellipsen die Brennpunkte gemeinschaftlich haben, so haben auch alle diese Ellipsen die von der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

2. Bei den konischen Hyperbeln wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Tangente halbirt; und somit wird jeder von einem Brennpunkte der konischen Hyperbeln ausgehende Lichtstrahl sowohl im näheren als auch im entfernteren Hyperbelzweige so reflectirt, dass, wenn man den reflectirten Lichtstrahl rückwärts verlängert, diese Verlängerung in den anderen Brennpunkt eintrifft. Bei den konischen Hyperbeln werden also die von einem Brennpunkte ausgehenden Lichtstrahlen so reflectirt, dass sie sich zerstreuen, und keine Katakaustika erzeugen.

## §. 11.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Katakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Katakaustika die bestimmte Gleichung

$$160)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=0$$

ergibt, so hat man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Ausdrücke 2) und 3) einzuführen, und man bekommt für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$161)\qquad \mathfrak{F}\left\{\left(x+(u-p)\cdot\frac{dx}{du}\right),\left(y+u\cdot(u-p)\cdot\frac{dx}{du}\right)\right\}=0$$

Man bediene sich auch hier der schon in §. 6 angewendeten Abkürzungszeichen $M$ und $N$ und differentiire 161); so bekommt man auch hier

$$162)\qquad \left(\frac{d_M\mathfrak{F}}{dM}+u\cdot\frac{d_N\mathfrak{F}}{dN}\right)\cdot\left(2-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{du}-(u-p)\cdot\frac{d^2u}{du^2}\right)=0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$163)\qquad 2-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{du}-(u-p)\quad\frac{d^2u}{du^2}=0$$

oder wenn

$$164)\qquad \frac{d_M\mathfrak{F}}{dM}+u\cdot\frac{d_N\mathfrak{F}}{dN}=0$$

Die Differentialgleichung 163), welche von der dritten Ordnung ist, führt hier ebenso, wie in §. 6, zu folgender Verbindung zweier Gleichungen:

$$165)\qquad \mathfrak{F}(A,B)=0$$

und

$$166)\qquad (y-B)=(x-A)\quad u.$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen ist die erste Stammgleichung zu 161); und weil $A$ und $B$ in der durch 165) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ aus 166) eliminiren, wodurch man eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten bekommt.

Um nun die Gleichung 166) weiter behandeln zu können, muss man für $u$ den Ausdruck 5) zurückführen; und dabei geht 166) über in

$$167)\ \Big((x-g)\cdot(y-B)+(x-A)\cdot y\Big)\cdot p^2+2\cdot\Big((x-g)\cdot(x-A)-(y-B)\cdot y\Big)\cdot p \\ -(x-g)\cdot(y-B)-(x-A)\cdot y=0$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 155) im §. 10; so bekommt man die Urgleichung

$$168)\qquad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\pm\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2}=G$$

Hier erscheinen drei Integrations-Constanten $A$, $B$, $G$, während die vorgelegte Differentialgleichung 161) nur eine von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch $A$ und $B$ in der durch Gleichung 165) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ eliminiren, und ein Urintegral mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jedoch die Geichungen 160) und 165) mit einander, so erkennt man, dass zwischen $A$ und $B$ dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Man kann also statt der Integrations-Constanten $A$ und $B$ auch die zur vorgeschriebenen Katakaustika gehörigen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ setzen; und dabei geht 168) über in

$$169)\qquad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\pm\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}=G$$

Der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2+y^2}$ ist der vom leuchtenden Punkte nach irgend einem zur gesuchten Reflexions-Curve gehörigen Punkte $(x, y)$ gezogene Leitstrahl. Ebenso ist der Ausdruck $\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}$ der von irgend einem zur vorgeschriebenen Katakaustika gehörigen Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ nach dem zur gesuchten Reflexions-Curve gehörigen Punkte $(x, y)$ gezogene Leitstrahl. Daraus folgt, dass, je nachdem man in Gleichung 169) dem Doppelzeichen seine positive oder negative Bedeutung beilegt, entweder die Summe oder der Unterschied der beiden Leitstrahlen gleich ist dem Integrations-Constanten $G$, d. h. alle durch 169) dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln mit der Hauptaxe $G$ und mit der Excentricität $\sqrt{(\mathfrak{x}-g)^2+\mathfrak{y}^2}$. Jeder im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika liegende Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist der eine Brennpunkt, und der leuchtende Punkt ist der andere Brennpunkt der durch 169) dargestellten Ellipsen oder Hyperbeln. Man hat nun zu unterscheiden:

1. Bei den konischen Ellipsen wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Normale halbirt, und somit wird jeder von einem Brennpunkte der konischen Ellipsen ausgehende Lichtstrahl in den anderen Brennpunkt reflectirt. Wählt man also im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika i r g e n d e i n e n Punkt, und verbindet man diesen mit dem leuchtenden Punkte; so sind alle unendlich

vielen konischen Ellipsen, denen die eben besagte Verbindungslinie als Excentricität zukommt; so beschaffen, dass sie die vom leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen nach jenem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika gewählten) Punkte reflectiren. Geht man zu einem zweiten (unmittelbar anliegenden) Punkte im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika über, und verbindet man diesen zweiten Punkt wiederum mit dem leuchtenden Punkte; so sind alle unendlich vielen konischen Ellipsen, denen diese zweite Verbindungslinie als Excentricität zukommt, ebenfalls so beschaffen, dass sie die vom leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen nach dem (im Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika gewählten) zweiten Punkte reflectiren. Und so fort.

Weil nun (nach §. 10) bei jeder konischen Ellipse, sobald der eine ihrer Brennpunkte der leuchtende Punkt ist, die Katakaustika sich in den anderen Brennpunkt zusammenzieht, welcher bei allen durch 169) dargestellten unendlich vielen Ellipsen-Schaaren jedesmal ein dem Umfange der vorgeschriebenen Katakaustika angehöriger Punkt ist; so ist unter allen diesen Ellipsen keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige dieser Ellipsen ist die gesuchte Reflexions-Curve. Man muss also untersuchen, ob unter diesen unendlich vielen Ellipsen-Schaaren solche Reihen stetig nebeneinander liegender Ellipsen vorkommen, die sich so schneiden, dass die dadurch entstandenen Durchschnittslinien auch noch der vorgelegten Differentialgleichung 161) genügen. Weil aber diese Differentialgleichung eine der zweiten Ordnung ist, so muss jede Durchschnittslinie (§. 4) eine solche Gränz-Curve sein, welche in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Ellipsen eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. Die Gränz-Curven der zweiten Ordnung werden aber, wie in der analytischen Geometrie noch näher nachgewiesen werden muss, durch das einfach singuläre Urintegral dargestellt; und dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

2. Bei den konischen Hyperbeln wird jeder zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen liegende Winkel von der betreffenden Tangente halbirt, und somit wird jeder von einem Brennpunkte der konischen Hyperbeln ausgehende Lichtstrahl sowohl im näheren als auch im entfernteren Hyperbelzweige so reflectirt, dass, wenn man den reflectirten Strahl rückwärts verlängert, diese Verlängerung in den anderen Brennpunkt eintrifft. Bei den konischen Hyperbeln werden also die von einem Brennpunkte ausgehenden Lichtstrahlen so reflectirt, dass sie sich zerstreuen; und dessbalb kann auch von den diese Hyperbeln osculirenden Gränz-Curven keine Katakaustika erzeugt werden.

Weil nun durch Gleichung 169) nur konische Ellipsen dargestellt werden dürfen, so darf bei dem Doppelzeichen auch nur das positive gelten; und Gleichung 169) specialisirt sich in

170) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}=G$$

Erste Methode, das einfach singuläre Integral zu bestimmen. Wenn man dieses aus dem allgemeinen Urintegral ableiten will; so beachte man, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Curven; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 170) differentiirt, so bekommt man

171) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x-\mathfrak{x}).\sqrt{(x-g)^2+y^2}+(x-g).\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}{(y-\mathfrak{y}).\sqrt{(x-g)^2+y^2}+y.\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 170) nach allen $x$ differentiirt, so bekommt man

$$172)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(x-\mathfrak{x}).\sqrt{(x-g)^2+y^2} + (x-g).\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}{(y-\mathfrak{y}).\sqrt{(x-g)^2+y^2} + y.\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}$$
$$+ \frac{\left((x-\mathfrak{x})+(y-\mathfrak{y})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right).\,\frac{d\mathfrak{x}}{dx} + \left(\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}\right).\,\frac{dG}{dx}}{(y-\mathfrak{y}).\sqrt{(x-g)^2+y^2} + y.\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}\,.\,\sqrt{(x-g)^2+y^2}$$

Damit aber aus 171) und 172) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$173)\quad \left((x-\mathfrak{x})+(y-\mathfrak{y})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right).\,\frac{d\mathfrak{x}}{dx} + \left(\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}\right)\,\frac{dG}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man Gleichung 171) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in $y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ enthaltenen $x$; so bekommt man neben der Gleichung 173) auch noch

$$174)\quad \left[(x-g)(x-\mathfrak{x}) + y(y-\mathfrak{y}) + \left(\sqrt{(x-g)^2+y^2}\right).\,\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}\right].\,\left((y-\mathfrak{y})-(x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)\,\frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$175)\quad (y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

und hiermit wird diejenige Grade dargestellt, welche durch den Punkt $(x, y)$ der gesuchten Reflexions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der vorgeschriebenen Katakaustika gehörige Tangente ist. Jede Katakaustika ist ja, wie schon in §. 1 auseinandergesetzt wurde, eine einhüllende Gränz-Curve.

Eliminirt man jetzt mittels der Gleichung 175) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 173), so fällt auch $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg; und 173) geht über in

$$(d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2) + \left(\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}\right).\,dG = 0$$

oder in

$$\left(\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}\right) + dG = 0.$$

Daraus folgt

$$dG = -\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

oder

$$176)\quad G = K - \int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

wo $K$ ein Integrations-Constanter ist. Gleichung 170) geht also über in

$$177)\quad \sqrt{(x-g)^2+y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2} = K - \int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}.$$

Mit dieser Gleichung hat man aber noch folgende drei

$$175)\quad (y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

$$160)\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

$$178)\quad \frac{d_{\mathfrak{x}}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{x}} + \frac{d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{y}}\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

zu verbinden, d. h. man hat die in 177) angezeigte Integration auszuführen, und sodann die drei Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{y}$ zu eliminiren. Dabei fällt auch $d\mathfrak{x}$ mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ und dem Integrations-Constanten $K$. Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 161); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von dem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die bestimmt vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integrale kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Ellipsen; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 166) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass $u$ diesmal eine Function von $x$, $y$, $p$ ist; so bekommt man

179) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{(u-p) + (x-A) \cdot \left(\frac{d_x u}{dx} + \frac{d_y u}{dy} \cdot p\right)}{(x-A) \cdot \frac{d_p u}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven: und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 166) nach allen $x$ differentiirt, so bekommt man weiter

180) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{(u-p) + (x-A) \cdot \left(\frac{d_x u}{dx} + \frac{d_y u}{dy} \cdot p\right)}{(x-A) \cdot \frac{d_p u}{dp}} - \frac{\frac{dB}{dA} - u}{(x-A) \cdot \frac{d_p u}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 179) und 180) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

181) $$\frac{dB}{dA} - u = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 165) die Differentialgleichung

182) $$\frac{d_A \mathfrak{F}}{dA} + \frac{d_B \mathfrak{F}}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 165), 166), 181), 182) die drei Bestandtheile $A$, $B$, $\frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

183) $$y - u \cdot x = \varphi(u)$$

wo die Form des Ausdruckes $\varphi(u)$ abhängig ist von $\mathfrak{F}(A, B) = 0$. Hier hat man für $u$ noch seinen Ausdruck

$$\frac{2 \cdot (x-g) \cdot p - y \cdot (1-p^2)}{2y \cdot p + (x-g) \cdot (1-p^2)}$$

zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit $x$, $y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 164), d. h. die Gleichung

184) $$\frac{d_M \mathfrak{F}}{dM} + u \cdot \frac{d_N \mathfrak{F}}{dN} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 161) und 184) zugleich erfüllt werden. Die hier aufzusuchende Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 183) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit $x$, $y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehene Urgleichung ergibt, wie bei der zweiten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode in §. 7, §. 8, §. 9.)

Anmerkung. In speciellen Fällen werden durch die zweite und dritte Methode grosse Weitläufigkeiten veranlasst; und desshalb sollen die in §. 12, §. 13, §. 14 nachfolgenden Beispiele nur nach der ersten Methode ausgeführt werden.

## §. 12.

**Beispiel 4.** Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch die Gleichung

185) $$\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier ist (nach §. 11) das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

186) $$B^3 = h \,.\, A^2$$

und

187) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

188) $$\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$$

und

189) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = G$$

dargestellt, d. h. man hat alle unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen, bei denen jeder im Umfange der vorgeschriebenen Parabel liegende Punkt der eine Brennpunkt sein kann, und bei denen der leuchtende Punkt der andere Brennpunkt sein muss.

Nun sind die Reflexions-Curven, als Gränz-Curven der zweiten Ordnung, nicht durch ein allgemeines sondern durch ein einfach singuläres Integral darzustellen; und die Gleichungen 175) und 177) specialisiren sich diesmal in

190) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{2 \,.\, \mathfrak{y}}{3 \,.\, \mathfrak{x}} = 0$$

und

191) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = K - \left(\frac{1}{3} + \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) \,.\, \sqrt{9 \,.\, \mathfrak{x}^2 + 4 \,.\, \mathfrak{y}^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 185), 190), 191) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig auf einander folgender Reflexions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die vorgeschriebene Katakaustika $\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$ erzeugt wird; und weil man $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausdrücken kann, so können alle diese Reflexions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man entweder $y$ und $\mathfrak{y}$, oder $y$ und $\mathfrak{x}$ aus den drei Gleichungen 185), 190), 191) eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{x}$, und im zweiten Falle das $\mathfrak{y}$ als Function von $x$ und $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung dieser drei Gleichungen ein *einfach singuläres* und nicht ein *einfach particuläres* Integral ist.

## §. 13.

**Beispiel 5.** Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so reflectirt werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch die Gleichung

192) $$\mathfrak{y}^2 = 2h\,.\,\mathfrak{x}$$

vorgeschriebene *konische* Parabel ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen 175) und 177) bezüglich in

193) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{h}{\mathfrak{y}} = 0$$

und

194) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = K - \frac{\mathfrak{y}\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2h} + \frac{h}{2}\,.\,\mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und man kann die gesuchte Reflexions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

## §. 14.

**Beispiel 6.** Man sucht diejenige Reflexions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so reflectirt werden, dass die zugehörige Katakaustika die durch folgende Gleichung

195) $$\mathfrak{y}^{\frac{2}{3}} + \mathfrak{x}^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

vorgeschriebene Hypokykloide ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen 175) und 177) bezüglich in

196) $$(y-\mathfrak{y})\,.\,\sqrt{\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})\,.\,\sqrt{\mathfrak{y}} = 0$$

und

197) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = K - \frac{3}{2}\sqrt{k\,.\,\mathfrak{x}^2}$$

und man kann auch hier die gesuchte Reflexions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

# ZWEITE ABTHEILUNG.

Bestimmung der Refractions-Curven, während die Diakaustika vorgeschrieben ist.

---

## Erster Abschnitt.

Bestimmung der Refractions-Curven für parallele Lichtstrahlen.

### §. 15.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in einen einzigen Punkt (Brennpunkt) zusammenzieht.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Refractions-Curve so ein, dass ihre Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel ist; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichungen 9) und 10) bezüglich in

198) $$\mathfrak{g} = x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

199) $$\mathfrak{h} = y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft. Gleichung 198) lässt sich umsetzen in

$$(x-\mathfrak{g}) \cdot dv + v \cdot dx + dy = 0$$

und wenn man integrirt, so gibt sich

200) $$(x-\mathfrak{g}) \cdot v + y = A$$

wo A ein Integrations-Constanter ist. Man hat nun allerdings die erste Stammgleichung zu 198); ob jedoch Gleichung 200) auch der 199) genügt, muss noch besonders nachgewiesen werden. Aus 200) folgt

$$y = A - (x-\mathfrak{g}) \cdot v$$

und

$$p = -v - (x-\mathfrak{g}) \cdot \frac{dv}{dx}$$

und wenn man für $y$ und $p$ diese Ausdrücke substituirt, so reducirt Gleichung 199) sich auf

201) $$\mathfrak{h} = A$$

so dass 200) übergeht in

202) $$(y-\mathfrak{h}) + (x-\mathfrak{g}) \cdot v = 0$$

Hiermit hat man eine erste Integralgleichung, welche jetzt, nachdem der Integrations-Constante $A$ den besonderen Werth $\mathfrak{h}$ angenommen hat, wirklich so beschaffen ist, dass sie den beiden Differentialgleichungen 198) und 199) zugleich genügt.

Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für $v$ den Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht 202) über in

$$203)\qquad (y-\mathfrak{h}) - (x-\mathfrak{g})\;\; p = \Big((y-\mathfrak{h})\;\; p + (x-g)\Big) \cdot \sqrt{\lambda^2\;\;(1+p^2) - 1}$$

Man erhebe beiderseits aufs Quadrat, so ergibt sich eine Gleichung, welche sich auf folgende Weise anordnen lässt:

$$204)\qquad \Big((y-\mathfrak{h})^2 + (x-\mathfrak{g})^2\Big) \cdot (1+p^2) = \lambda^2\;\; \Big((y-\mathfrak{h}) \cdot p + (x-\mathfrak{g})\Big)^2 \cdot (1+p^2)$$

und daraus folgt weiter

$$205)\qquad \mp \lambda \cdot \frac{(y-\mathfrak{h}) \cdot p + (x-\mathfrak{g})}{\sqrt{(y-\mathfrak{h})^2 + (x-\mathfrak{g})^2}} = 1$$

Wenn man integrirt, so gibt sich

$$206)\qquad \mp \lambda \cdot \sqrt{(y-\mathfrak{h})^2 + (x-\mathfrak{g})^2} = x + E$$

und letztere Gleichung kann man nach umformen in

$$207)\qquad \frac{\left(x - \frac{\lambda^2 \cdot \mathfrak{g} + E}{\lambda^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2 \cdot (\mathfrak{g}+E)^2} + \frac{(y-\mathfrak{h})^2}{\frac{1}{\lambda^2-1} \cdot (\mathfrak{g}+E)^2} = 1$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende des §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Das Urintegral ist also diesmal nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen; denn der erste Integrations-Constante $A$ hat, damit den beiden Differentialgleichungen 198) und 199) zugleich genügt wird, den besonderen Werth $\mathfrak{h}$ angenommen.

Die durch 207) dargestellte Curvenreihe besteht aus konischen Ellipsen oder konischen Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist.

Die Hauptaxe aller dieser Curven läuft in der Entfernung $\mathfrak{y} = \mathfrak{h}$ mit der Abscissenaxe parallel, sie ist also auch mit den ursprünglichen Lichtstrahlen parallel. Die Hauptaxe selbst ist $= \frac{2\lambda \cdot (\mathfrak{g}+E)}{\lambda^2 - 1}$, und die Nebenaxe ist $= \frac{2 \cdot (\mathfrak{g}+E)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$.

Die Ordinaten sowohl der beiden Scheitel als auch der beiden Brennpunkte haben den vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{h}$; dagegen die Abscissen der beiden Scheitel haben die Werthe

$$\frac{\lambda \cdot \mathfrak{g} - E}{\lambda + 1}, \quad \text{und} \quad \frac{\lambda \cdot \mathfrak{g} + E}{\lambda - 1}$$

und die Abscissen der beiden Brennpunkte haben die bezüglichen Werthe

$$\mathfrak{g}, \quad \text{und} \quad \mathfrak{g} + \frac{2 \cdot (\mathfrak{g}+E)}{\lambda^2 - 1}$$

Daraus folgt, dass die Excentricität $= \frac{2 \cdot (\mathfrak{g}+E)}{\lambda^2 - 1}$ ist.

Zusatz. Die für die Refractions-Curve gefundene Gleichung 206) geht, wenn man $\lambda = -1$ setzt, wieder über in die für die Reflexions-Curve gefundene Gleichung 21). Aber die Gleichung 207) bekommt bei diesem Werthe des $\lambda$ Null in den Nenner, d. h. bei $\lambda = -1$ verliert die Gleichungsform 207) ihre Gültigkeit; und desshalb muss man $-1$ statt $\lambda$ schon in 206) einsetzen, und erst alsdann darf man umformen, wodurch sich wieder die Gleichung 22) ergibt.

## §. 16.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Diakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe mit den Lichtstrahlen parallel läuft; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Diakaustika die bestimmte Gleichung

208) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

ergibt, so hat man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Ausdrücke 9) und 10) einzuführen; und man bekommt für die gesuchte Refractionscurve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

209) $$\mathfrak{F}\left\{\left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right), \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)\right\} = 0$$

Um das Verfahren bequem fortführen zu können, setze man

$$Q \text{ anstatt } x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

$$R \text{ anstatt } y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

Dabei kürzt Gleichung 209) sich ab in

210) $$\mathfrak{F}(Q, R) = 0$$

und wenn man nach allem $x$ differentiirt, so bekommt man

211) $$\left(\frac{d_Q \mathfrak{F}}{dQ} - v \cdot \frac{d_R \mathfrak{F}}{dR}\right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2 v}{dv^2}\right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

212) $$2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2 v}{dv^2} = 0$$

oder wenn

213) $$\frac{d_Q \mathfrak{F}}{dQ} - v \cdot \frac{d_R \mathfrak{F}}{dR} = 0$$

Die Differentialgleichung 212), welche von der dritten Ordnung ist, und aus welcher das der vorgelegten Differentialgleichung 209) entsprechende allgemeine Urintegral gewonnen wird, lässt sich ohneweiters integriren und liefert

214) $$x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} = A$$

wo $A$ ein Integrations-Constanter ist. Dabei geht Gleichung 209) über in

215) $$\mathfrak{F}\left\{A, \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)\right\} = 0$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass der Ausdruck $\left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)$ einen von $x$ und von $y$ unabhängigen Werth hat; und wenn man diesen Werth mit $B$ bezeichnet, so bekommt man

216) $$y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} = B$$

während zwischen $A$ und $B$ die ganz bestimmte Gleichung

$$217)\qquad \mathfrak{F}(A, B) = 0$$

stattfindet. Wenn man Gleichung 214) mit $v$ multiplicirt, und das sich ergebende Produkt zu 216) addirt; so bekommt man

$$218)\qquad (y-B) + (x-A)\,.\,v = 0$$

Hiermit hat man eine erste Stammgleichung, in welcher zwar zwei Integrations-Constanten $A$ und $B$ vorkommen; weil aber $A$ und $B$ in der durch 217) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ aus 218) eliminiren, und eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten herstellen.

Um nun die Gleichung 218) weiter behandeln zu können, muss man für $v$ den Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht 218) über in

$$219)\qquad (y-B) - (x-A)\,.\,p = \big((y-B)\,.\,p + (x-A)\big)\,.\,\sqrt{\lambda^2\,.\,(1+p^2) - 1}$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 203) im vorigen §; so bekommt man das Urintegral

$$220)\qquad \mp\,\lambda\,.\,\sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

Hier erscheinen sogar drei Integrations-Constanten $A$, $B$, $E$, während die vorgelegte Differentialgleichung 209) nur von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch $A$ und $B$ in der durch 217) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ eliminiren, und eine Urgleichung mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 208) und 217) mit einander, so erkennt man, dass zwischen $A$ und B dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Man kann also statt der Integrations-Constanten $A$ und $B$ auch die zur vorgeschriebenen Diakaustika gehörigen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ setzen; und dabei geht 220) über in

$$221)\qquad \mp\,\lambda\,.\,\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

oder in

$$222)\qquad \frac{\left(x - \frac{\lambda^2\,.\,\mathfrak{x} + E}{\lambda^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2.\,(\mathfrak{x}+E)^2} + \frac{(y-\mathfrak{y})^2}{\frac{1}{\lambda^2-1}\,.\,(\mathfrak{x}+E)^2} = 1$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende des §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Alle hierdurch dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen sonach entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist.

Die Hauptaxen aller dieser Ellipsen oder Hyperbeln laufen in der Entfernung $y = \mathfrak{y}$ mit der Abscissenaxe parallel, sind also auch mit den ursprünglichen Lichtstrahlen parallel. Die Hauptaxen selbst sind $= \frac{2\lambda\,.\,(\mathfrak{x}+E)}{\lambda^2 - 1}$, und die Nebenaxen sind $= \frac{2\,.\,(\mathfrak{x}+E)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$.

Die Abscissen der beiden Scheitel sind $\frac{\lambda\,.\,\mathfrak{x} - E}{\lambda + 1}$ und $\frac{\lambda\,.\,\mathfrak{x} + E}{\lambda - 1}$; dagegen haben beide Scheitel eine gleich lange Ordinate, nämlich $y = \mathfrak{y}$.

Der eine Brennpunkt ist bestimmt durch die beiden Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, und der andere durch die beiden Coordinaten $\left(\mathfrak{x} + \frac{2 \cdot (\mathfrak{x}+E)}{\lambda^2 - 1}\right)$ und $\mathfrak{y}$.

Daraus folgt, dass die Excentricität $= \frac{2 \cdot (\mathfrak{x}+E)}{\lambda^2 - 1}$ ist.

Vergleicht man die in §. 15 hergestellte Gleichung 207) mit der hier gefundenen Gleichung 222), so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Lichtstrahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ concentriren mussten, hier die gebrochenen Lichtstrahlen sich im Brennpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier vorgeschriebenen Diakaustika $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch Gleichung 222) dargestellten Ellipsen oder Hyperbeln. Desshalb ist unter allen diesen Ellipsen oder Hyperbeln keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen einzigen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige der hier gefundenen Ellipsen oder Hyperbeln ist die gesuchte Refractions-Curve. Man muss daher untersuchen, ob unter diesen unendlich vielen Ellipsen-Schaaren oder Hyperbel-Schaaren solche Reihen stetig neben einander liegender Ellipsen (oder Hyperbeln) vorkommen, die sich so schneiden, dass die dadurch entstandenen Durchschnittslinien auch noch der vorgelegten Differentialgleichung 209) genügen. Weil aber diese Differentialgleichung eine der zweiten Ordnung ist, so muss jede Durchschnittslinie (§. 4) eine solche Gränz-Curve sein, welche in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Ellipsen (oder Hyperbeln) eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht. — Die Gränz-Curven der zweiten Ordnung werden aber, wie in der analytischen Geometrie noch näher auseinander gesetzt werden muss, durch das e i n f a c h s i n g u l ä r e Urintegral dargetellt; und dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

E r s t e M e t h o d e. Wenn man das einfach singuläre Urintegral aus dem allgemeinen ableiten will, so ist dessen in Gleichung 221) aufgestellte Form die bequemste. Nun beachte man, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Ellipsen (oder Hyperbeln); und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 221) differentiirt, so bekommt man

$$223)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda \cdot (x-\mathfrak{x}) \mp \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}}{\lambda \cdot (y-\mathfrak{y})} .$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 221) nach allem $x$ differentiirt, so bekommt man jetzt

$$224)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda \cdot (x-\mathfrak{x}) \mp \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}}{\lambda \cdot (y-\mathfrak{y})}$$
$$+ \frac{(y-\mathfrak{y}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})}{(y-\mathfrak{y})} \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \mp \frac{\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}}{\lambda \cdot (y-\mathfrak{y})} \cdot \frac{dE}{dx}$$

Damit aber aus 223) und aus 224) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

$$225)\qquad \left((y-\mathfrak{y}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})\right) \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \mp \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}\right) \cdot \frac{dE}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man die Gleichung 223) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in $y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ enthaltenen $x$; so bekommt man neben der Gleichung 225) auch noch

$$226)\qquad \left((x-\mathfrak{x}) \pm \lambda \cdot \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}\right) \cdot \left((y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right) \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

227) $$(y—\mathfrak{y}) — (x—\mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

und hiermit wird diejenige Grade dargestellt, welche durch den Punkt $(x, y)$ der gesuchten Refractions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der vorgeschriebenen Diakaustika gehörige Tangente ist. Jede Diakaustika ist ja, wie schon im §. 1 auseinander gesetzt wurde, eine einhüllende Gränz-Curve.

Eliminirt man jetzt mittels 227) die Differenz $(y—\mathfrak{y})$ aus 225), so fällt auch die Differenz $(x—\mathfrak{x})$ mit hinweg; und 225) geht über in

$$(d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2) \mp \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}\right) \cdot dE = 0$$

oder in

$$\lambda \cdot \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2} \mp dE = 0$$

Daraus folgt

$$dE = \pm \lambda \cdot \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

oder

228) $$E = K \pm \lambda \cdot \int \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

wo $K$ ein Integretions-Constanter ist. Gleichung 221) geht also über in

229) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(x—\mathfrak{x})^2 + (y—\mathfrak{y})^2} = x + K \pm \lambda \cdot \int \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

Mit dieser Gleichung muss man aber noch folgende drei

227) $$(y—\mathfrak{y}) — (x—\mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

208) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

230) $$\frac{d_\mathfrak{x}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{x}} + \frac{d_\mathfrak{y}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{y}} \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

verbinden, d. h. man muss die in 229) angezeigte Integration ausführen, und sodann die drei Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{y}$ eliminiren. Dabei fällt auch $d\mathfrak{x}$ mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ und dem Integrations-Constanten $K$. Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 209); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integral kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Ellipsen (oder Hyperbeln); und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 218) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass $v$ diesmal nichts als ein mit $p$ versehener Ausdruck ist; so bekommt man

231) $$\frac{dp}{dx} = — \frac{(v+p)}{(x—A) \cdot \frac{dv}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 218) nach allen $x$ differentiirt, so bekommt man jetzt

232) $$\frac{dp}{dx} = — \frac{(v+p)}{(x—A) \cdot \frac{dv}{dp}} + \frac{\frac{dB}{dA} + v}{(x—A) \cdot \frac{dv}{dp}} \cdot \frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 231) und 232) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

233) $$\frac{dB}{dA} + v = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 217) die Differentialgleichung

234) $$\frac{d_A\mathfrak{F}}{dA} + \frac{d_B\mathfrak{F}}{dB} \cdot \frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 217), 218), 233), 234) die drei Bestandtheile $A, B, \frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

235) $$y + v \cdot x = \psi(v)$$

wo die Form des Ausdruckes $\psi(v)$ abhängig ist von $\mathfrak{F}(A, B) = 0$. Hier hat man für $v$ noch den Ausdruck

$$-\frac{p + \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}{1 - p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}}$$

zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit $x, y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 213), d. h. die Gleichung

213) $$\frac{d_Q\mathfrak{F}}{dQ} - v \cdot \frac{d_R\mathfrak{F}}{dR} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 209) und 213) zugleich erfüllt werden. Die hier aufgesuchte Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 235) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit $x, y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehene Urgleichung ergibt, wie bei der ersten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode, in §. 17, §. 18, §. 19.)

Zusatz. Alle hier in §. 16 befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, wieder in die reflexorischen (§. 6) über. Bei $\lambda = -1$ bekommt aber die Gleichung 222) Null in den Nenner, und dabei verliert die Gleichungsform 222) ihre Gültigkeit. Desshalb muss man $-1$ statt $\lambda$ schon in 221) einsetzen, und erst alsdann darf man umformen, wodurch sich wieder die Gleichung 37) ergibt.

## §. 17.

**Beispiel 1.** Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

236) $$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

237) $$\left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^3 = h \cdot \left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

238) $$-\left[3v \cdot \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^2 + 2h \cdot \left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)\right] \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

239) $$2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 16) die den beiden Differentialgleichungen 237) und 239) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

240) $$B^3 = h \cdot A^2$$

und

241) $$(y - B) + (x - A) \cdot v = 0$$

Jetzt substituire man für $v$ den Ausdruck 11), so setzt Gleichung 241) sich um in

242) $$(y - B) - (x - A) \cdot p = \left((y - B) \cdot p + (x - A)\right) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot (1+p^2) - 1}$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 203) in §. 15; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

243) $$B^3 = h \cdot A^2$$

und

244) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(y - B)^2 + (x - A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

245) $$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

und

246) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{x})^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen oder konischer Hyperbeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Curven gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren einer Brennpunkt im Umfange der vorgeschriebenen Diakaustika liegt.

Nun sind die Refractions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon im §. 16 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so specialisiren die in §. 16 aufgestellten zwei Gleichungen 227) und 229) sich diesmal in

247) $$(y - \mathfrak{y}) - (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{2 \cdot \mathfrak{y}}{3 \cdot \mathfrak{x}} = 0$$

und

248) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{x})^2} = x + K \pm \lambda \cdot \frac{\sqrt{(4 \cdot \mathfrak{y}^2 + 9 \cdot \mathfrak{x}^2)^3}}{27 \cdot \mathfrak{x}^2}$$

Wenn man zuerst die Differenz ($y-\mathfrak{y}$) und hierauf die Differenz ($x-\mathfrak{x}$) aus 247) und 248) eliminirt, so bekommt man bezüglich

249) $$\frac{-3.\mathfrak{x} \mp \lambda.\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{3.\mathfrak{x}} \cdot x = K \pm \lambda \cdot \frac{4.h}{27.\mathfrak{y}} \cdot \sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}$$

und

250) $$\frac{-3.\mathfrak{x} \mp \lambda.\sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}^2}}{2.\mathfrak{y}} \cdot y = K - \frac{\mathfrak{x}}{2} \mp \lambda \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) \cdot \sqrt{4.\mathfrak{y}^2+9.\mathfrak{x}}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 236), 249), 250) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, so können alle diese Refractions-Curven mittels der Coordinaten 7er vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 236) und 249) entweder das $\mathfrak{y}$ oder das $\mathfrak{x}$ eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{x}$ und im zweiten Falle das $\mathfrak{y}$ als Function von $x$ und von $K$ erscheint; und hiermit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 236), 249), 250) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 240) und 241) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 235) in

251) $$y + v \,.\, x = \frac{4.h}{27} \cdot \frac{1}{v^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 251) auch die 237) erfüllt wird, und ob das zu 251) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Aus 251) aber folgt der Reihe nach

252) $$y = -v \,.\, x + \frac{4.h}{27.v^2}$$

253) $$p = -v - \left(x + \frac{8.h}{27.v^3}\right) \cdot \frac{dv}{dx}$$

254) $$\frac{dp}{dx} = -2 \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{8.h}{9.v^4} \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \left(x + \frac{8.h}{9.v^3}\right) \cdot \frac{d^2v}{dx^2}$$

Wenn man die für $y$ und $p$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 237) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 237) wird von dem zu 251) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für $p$ und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 239) einsetzt, se reducirt sich diese auf

255) $$\frac{8.h}{9.v^4} \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

Diese Gleichung trägt aber einen Widerspruch in sich selbst; und somit ist man überzeugt, dass das zu 251) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der vorgelegten Differentialgleichung 237) ist. Um jedoch Gleichung 251) weiter behandeln zu können, muss man für $v$ den (in §. 3 aufgestellten) Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht Gleichung 251) über in

256) $$y - \frac{p + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{1 - p \,.\, \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} \cdot x = \frac{4h}{27} \cdot \left(\frac{1 - p\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{p + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}\right)^2$$

Die letzte Gleichung nimmt eine bequemere Gestalt an, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit $\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$, und wenn man Zähler und Nenner des zweiten Bruches mit $\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2$ multiplicirt; denn dadurch bekommt man zunächst

$$y-\frac{(\lambda^2-1).(1+p^2)}{\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)}\right).(1+p^2)}.x=\frac{4h}{27}\frac{\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2.(1+p^2)^2}{(\lambda^2-1)^2.(1+p^2)^2}$$

oder, wenn man in Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren unterdrückt

$$257)\quad y-\frac{\lambda^2-1}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}.x=\frac{4h}{27.(\lambda^2-1)^2}.\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2$$

Man differentiire diese Gleichung, und ziehe alsdann die beiden ersten Theilsätze in einen zusammen. Dadurch gelangt man zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, wo alle Theilsätze mit dem gemeinschaftlichen Factor $\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$ versehen sind; und wenn man diesen unterdrückt, so gibt sich

$$258)\quad \frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}.dx+\frac{\lambda^2.(\lambda^2-1).x}{\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2.\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}.dp$$
$$=\frac{8.\lambda^2.h}{27.(\lambda^2-1)^2}.\left(dp-\frac{\lambda^2.p.dp}{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}\right)$$

Daraus folgt durch Integration

$$259)\quad \frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}.x=L+\frac{8.\lambda^2.h}{27.(\lambda^2-1)^2}.\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$$

und, wenn man $x$ aus 257) und 259) eliminirt,

$$260)\quad \left(\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right).y=(\lambda^2-1).L+\frac{8.\lambda^2.h}{27.(\lambda^2-1)}.\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$$
$$+\frac{4h}{27.(\lambda^2-1)^2}.\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2.\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende dieses §'s, wo der Werth $\lambda=-1$ besprochen werden wird.)

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 259) und 260) hat man, wegen des Integrations-Constanten $L$, abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{y}^3=h.\mathfrak{x}^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $p$ ausgedrückt sind, so können alle diese Refractionscurven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung von 259) und 260) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 249) und 250); davon überzeugt man sich auf folgende Weise:

In Folge der drei Gleichungen 223), 224), 225) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $E$ von $x$ unabhängig oder von $x$ abhängig sein, der für $p$ hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf folgende Form

$$261)\quad p=\frac{-\lambda.(x-\mathfrak{x})\mp\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2}}{\lambda.(y-\mathfrak{y})}$$

reducirt; und wenn man aus 247) und 261) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ eliminirt, so fällt auch die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg, d. h. die Gleichung 261) geht über in

$$262)\qquad p = \frac{-3\lambda . \mathfrak{x} \mp \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{2\lambda\ \ \mathfrak{y}}$$

Daraus folgt weiter

$$263)\qquad \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = \frac{-3 . \mathfrak{x} \mp \lambda . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{2 . \mathfrak{y}}$$

$$264)\qquad -\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = \frac{3 . (\lambda^2-1) . \mathfrak{x}}{2 . \mathfrak{y}}$$

$$265)\qquad p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = \frac{\pm (\lambda^2-1) . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{2\lambda\ \ \mathfrak{y}}$$

Man substituire jetzt die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 259), so geht diese über in

$$\frac{-3 . \mathfrak{x} \mp \lambda . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{3 . (\lambda^2-1) . \mathfrak{x}} . x = L \pm \frac{\lambda}{\lambda^2-1} . \frac{4h}{27\mathfrak{y}} . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}$$

oder, wenn man Alles mit $(\lambda^2-1)$ multiplicirt, in

$$266)\qquad \frac{-3 . \mathfrak{x} \mp \lambda . \sqrt{4\mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{3 . \mathfrak{x}} . x = (\lambda^2-1) . L \pm \lambda . \frac{4h}{27\mathfrak{y}} . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}$$

Man substituire auch die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 260), so geht diese über in

$$\frac{-3 . \mathfrak{x} \mp \lambda . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{2\mathfrak{y}} . y = (\lambda^2-1) . L \pm \lambda . \frac{4h}{27 . \mathfrak{y}} . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}$$
$$+ \frac{h}{3} . \frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{y}^2} . \frac{-3 . \mathfrak{x} \mp \lambda . \sqrt{4\mathfrak{y}^2 + 9\mathfrak{x}^2}}{2 . \mathfrak{y}}$$

oder in

$$267)\qquad \frac{-3 . \mathfrak{x} \mp \lambda . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{2 . \mathfrak{y}} . y = (\lambda^2-1) . L - \frac{\mathfrak{x}}{2} \mp \lambda . \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}$$

Wenn man hier noch $K$ statt $(\lambda^2-1) . L$ setzt, so fallen die Gleichungen 266) und 267) genau mit 249) und 250) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 238) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

$$268)\qquad 3v . \left(y - v . (v+p) . \frac{dx}{dv}\right)^2 = -2h . \left(x + (v+p) . \frac{dx}{dv}\right)$$

gelten lässt. Man dividire 237) in 268), so gibt sich

$$3v . \left(x + (v+p) . \frac{dx}{dv}\right) = -2 . \left(y - v . (v+p) . \frac{dx}{dv}\right)$$

oder

$$269)\qquad v . (v+p) . \frac{dx}{dv} = -(2y + 3vx)$$

Man eliminire $\frac{dx}{dv}$ aus 269) und aus 237), so gibt sich weiter

$$270)\qquad 27 . (y+vx)^3 = \frac{4h}{v^2} . (-y-vx)^2$$

oder

$$271)\qquad y + v . x = \frac{4h}{27} . \frac{1}{v^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 271) auch den beiden Gleichungen 237) und 268) zugleich genügt wird, und ob das zu 271) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Weil aber die Gleichung 271) mit 251) zusammenfällt, so ist auch der weitere Verlauf der dritten Methode ganz derselbe, wie bei der zweiten.

Zusatz. Wenn man die hier (§. 17) befindlichen refractorischen Resultate dadurch, dass man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 7) verwandeln will; so hat dieses bei der ersten Methode keinen Anstand. Bei der zweiten Methode aber bekommen die Gleichungen 257), 258), etc. Null in den Nenner. Man muss also $-1$ statt $\lambda$ schon in Gleichung 256) einsetzen, und erst dann darf man integriren, wodurch man wieder zu den Resultaten gelangt, wie bei der zweiten Methode des §. 7.

## §. 18.

**Beispiel 8.** Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie einfallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

$$272)\qquad \mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$273)\qquad \left(y - v\,.\,(v+p)\,.\,\frac{dx}{dv}\right)^2 = 2\,.\,h\,.\left(x + (v+p)\,.\,\frac{dx}{dv}\right)$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

$$274)\qquad -\left(v\,.\,y - v^2\,.\,(v+p)\,.\,\frac{dx}{dv} + h\right)\,.\left(2 + \frac{dp}{dx}\,.\,\frac{dx}{dv} - (v+p)\,.\,\frac{d^2v}{dv^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$275)\qquad 2 + \frac{dp}{dx}\,.\,\frac{dx}{dv} - (v+p)\,.\,\frac{d^2v}{dv^2} = 0$$

gelten; so ist (nach §. 16) die den beiden Differentialgleichungen 273) und 275) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$276)\qquad B^2 = 2\,.\,h\,.\,A$$

und

$$277)\qquad (y-B) + (x-A)\,.\,v = 0$$

Jetzt substituire man für $v$ den Ausdsuck 11), so setzt Gleichung 277) sich um in

$$278)\qquad (y-B) - (x-A)\,.\,p = \big((y-B)\,.\,p + (x-A)\big)\,.\,\sqrt{\lambda^2\,.\,(1+p^2) - 1}$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 203) in §. 15; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$279)\qquad B^2 = 2h\,.\,A$$

und

$$280)\qquad \mp\,\lambda\,.\,\sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was das nämliche ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

$$281)\qquad \mathfrak{y}^2 = 2h\,.\,\mathfrak{x}$$

und

$$282)\qquad \mp\lambda\,.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

dargestellt. d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen oder konischer Hyperbeln, deren Hauptaxen mit der allen diesen Curven gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren einer Brennpunkt im Umfange der vorgeschriebenen Diakaustika liegt.

Nun sind die Refractions-Curven als Gränz-Curven der zweiten Ordnung nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon in §. 16 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableitet, so beachte man, dass wie in §. 8, so auch hier

$$\pm\int\sqrt{d\mathfrak{x}^2+d\mathfrak{y}^2} = \pm\frac{\mathfrak{y}\,.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2\,.\,h} - \frac{h}{2}\,.\,\mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y}\pm\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

ist; und so specialisiren sich die (im §. 16 aufgestellten) zwei Gleichungen 227) und 229) diesmal in

$$283)\qquad (y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{h}{\mathfrak{y}} = 0$$

und

$$284)\qquad \mp\lambda\,.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2} = x + K + \lambda\,.\left\{\pm\frac{\mathfrak{y}\,.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2h} - \frac{h}{2}\,.\,\mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y}\pm\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)\right\}$$

Eliminirt man zuerst die Differenz $(y-\mathfrak{y})$, und hierauf die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ aus 283) und 284), so bekommt man bezüglich

$$285)\qquad \frac{-\mathfrak{y}\mp\lambda.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}}\,.\,x = K - \lambda\,.\frac{h}{2}\,.\,\mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y}\pm\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und

$$286)\qquad \frac{-\mathfrak{y}\mp\lambda\,.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\,.\,y = K + \frac{\mathfrak{y}.(-\mathfrak{y}\mp\lambda.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{2h} - \lambda\,.\frac{h}{2}\,.\,\mathrm{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y}\pm\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 272), 285), 286) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{y}^2=2h.\mathfrak{x}$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, so können alle diese Refractions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 272) und 285) entweder das $\mathfrak{y}$ oder das $\mathfrak{x}$ eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{x}$ und im zweiten Falle das $\mathfrak{y}$ als Function von $x$ und von $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 272), 285), 286) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 276) und 277) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 235) in

$$287)\qquad y + v\,.\,x = -\frac{h}{2v}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 287) auch die 273) erfüllt wird, und ob das zu 287) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Aus 287) aber folgt der Reihe nach

$$288)\qquad y = -vx - \frac{h}{2v}$$

$$289)\qquad p = -v - \left(x - \frac{h}{2.v^2}\right) . \frac{dv}{dx}$$

$$290)\qquad \frac{dp}{dx} = -2 . \frac{dv}{dx} - \frac{h}{v^3} . \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \left(x - \frac{h}{2.v^2}\right) . \frac{d^2v}{dx^2}$$

Wenn man die für $y$ und $p$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 273) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 273) wird von dem zu 287) gehörigen Integral erfüllt. Wenn man ebenso die hier für $p$ und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 275) substituirt, so reducirt sich diese auf

$$291)\qquad -\frac{h}{v^3} . \frac{dv}{dx} = 0$$

und weil letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst trägt, so ist man überzeugt, dass das zu 287) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der Gleichung 273) ist. Um jedoch Gleichung 287) weiter behandeln zu können, muss man für $v$ den (in §. 3 aufgestellten) Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht Gleichung 287) über in

$$292)\qquad y - \frac{p + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{1-p.\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} . x = +\frac{h}{2} . \frac{1-p.\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}$$

Diese Gleichung nimmt eine bequemere Form an, wenn man bei beiden Brüchen den Zähler und den Nenner mit $\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right)$ multiplicirt; denn dadurch bekommt jeder Bruch im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(1+p^2)$, welchen man unterdrücken kann, so dass Gleichung 292 sich reducirt auf

$$293)\; y - \frac{\lambda^2-1}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} . x = +\frac{h}{2.(\lambda^2-1)} . \left(-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right)$$

Man differentiire, und vereinige alsdann die beiden ersten Theilsätze. Dadurch erscheint der Ausdruck $\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right)$ als ein der ganzen Gleichung gemeinsamer Factor; und wenn man diesen unterdrückt, so bleibt endlich nur

$$294)\qquad \frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} . dx + \frac{\lambda^2.(\lambda^2-1).x}{\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2 . \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} . dp$$
$$= \frac{\lambda^2.h}{2.(\lambda^2-1)} . \frac{1}{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} . dp$$

Daraus folgt durch Integration

$$295)\quad \frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} . x = L + \frac{\lambda.h}{2.(\lambda^2-1)} . \text{lgnat}\left(\lambda . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right)$$

und wenn man aus 293) und 295) das $x$ eliminirt, so bekommt man weiter

$$296)$$
$$\left(\sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right) . y = (\lambda^2-1) . L + \frac{h}{2.(\lambda^2-1)} . \left(-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right) . \sqrt{\lambda^2.(1+p^6)-1}$$
$$+ \frac{\lambda.h}{2} . \text{lgnat}\left(\lambda . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2)-1}\right)$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende dieses §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 295) und 296) hat man, wegen des Integrations-Constanten $L$, abermals eine Reihe stetig auf einander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $p$ ausgedrückt sind, so können alle diese Refractions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung von 295) und 296) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 285) und 286); davon überzeugt man sich auf folgende Weise:

In Folge der Gleichungen 223), 224), 225) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. $E$ von $x$ unabhängig oder von $x$ abhängig sein, der für $p$ hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf

297) $$p = \frac{-\lambda.(x-\mathfrak{x}) \mp \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2}}{\lambda \,.\, (y-\mathfrak{y})}$$

reducirt; und wenn man aus 283) und 297) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ eliminirt, so fällt auch die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ mit hinweg, d. h. Gleichung 297) geht über in

298) $$p = \frac{-\lambda.\mathfrak{y} \mp \sqrt{h^2 + \mathfrak{y}^2}}{\lambda \,.\, h}$$

und daraus folgt weiter

299) $$\sqrt{\lambda^2 \,.\, (1+p^2) - 1} = \frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda.\sqrt{h^2 + \mathfrak{y}^2}}{h}$$

300) $$\left(-\lambda^2 \,.\, p + \sqrt{\lambda^2(1+p^2) - 1}\right) = \frac{(\lambda^2-1) \,.\, \mathfrak{y}}{h}$$

301) $$\text{lgnat}\left(\lambda \,.\, p + \sqrt{\lambda^2 \,.\, (1+p^2) - 1}\right) = \text{lgnat}\left(\frac{(-\lambda-1) \,.\, (\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{h}\right)$$
$$= \text{lgnat}\,(-\lambda-1) + \text{lgnat}\left(\frac{\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$
$$= \text{lgnat}\,(-\lambda-1) - \text{lgnat}\left(\frac{h}{\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}\right)$$
$$= \text{lgnat}\,(-\lambda-1) - \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

Man substituire die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 295), so bekommt man

$$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda.\sqrt{\mathfrak{y}^2 + h^2}}{(\lambda^2-1).\mathfrak{y}} \,.\, x = \left(L + \frac{\lambda.h}{2.(\lambda^2-1)} \,.\, \text{lgnat}\,(-\lambda-1)\right) - \frac{\lambda.h}{2.(\lambda^2-1)} \,.\, \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{\mathfrak{y}^2+h^2}}{h}\right)$$

oder, wenn man Alles mit $(\lambda^2-1)$ multiplicirt,

302) $$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda.\sqrt{\mathfrak{y}^2+h^2}}{\mathfrak{y}} \,.\, x = \left((\lambda^2-1) \,.\, L + \frac{\lambda.h}{2} \,.\, \text{lgnat}\,(-\lambda-1)\right) - \frac{\lambda.h}{2} \,.\, \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{\mathfrak{y}^2+h^2}}{h}\right)$$

Man substituire ebenso die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 296), so bekommt man weiter

303) $$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda.\sqrt{\mathfrak{y}^2+h^2}}{h} \,.\, y = \left((\lambda^2-1) \,.\, L + \frac{\lambda.h}{2} \,.\, \text{lgnat}\,(-\lambda-1)\right) + \frac{\mathfrak{y}(-\mathfrak{y} \mp \lambda.\sqrt{\mathfrak{y}^2+h^2})}{2h}$$
$$- \frac{\lambda.h}{2} \,.\, \text{lgnat}\left(\frac{-\mathfrak{y} \pm \sqrt{\mathfrak{y}^2+h^2}}{h}\right)$$

Wenn man hier noch $K$ statt $\left((\lambda^2-1) \,.\, L + \frac{\lambda.h}{2} \,.\, \text{lgnat}\,(-\lambda-1)\right)$ setzt, so fallen die Gleichungen 302) und 303) genau mit den Gleichungen 285) und 286) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 274) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

304) $$v \cdot y - v^2 \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv} + h = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

305) $$(v+p) \cdot \frac{dx}{dv} = + \frac{h + v \cdot y}{v^2}$$

und wenn man diesen für $(v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 273) substituirt, so geht diese über in

$$\left(\frac{h}{v}\right)^2 = 2h \cdot \frac{v \cdot (vx+y) + h}{v^2}$$

und daraus folgt weiter

306) $$y + v \cdot x = -\frac{h}{2v}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 306) auch den beiden Gleichungen 273) und 304) zugleich genügt wird, und ob das zu 306) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Weil aber die Gleichung 306) mit 287) zusammenfällt, so ist auch der weitere Verlauf der dritten Methode ganz derselbe, wie bei der zweiten.

Zusatz. Wenn man die hier (§. 18) befindlichen refractorischen Resultate dadurch, dass man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 8) verwandeln will; so hat dieses bei der ersten Methode keinen Anstand. Bei der zweiten Methode aber bekommen die Gleichungen 293), 294) etc. Null in den Nenner. Man muss also $-1$ statt $\lambda$ schon in Gleichung 292) einsetzen, und erst dann darf man integriren, wodurch man wieder zu den Resultaten gelangt, wie bei der zweiten Methode des §. 8.

## §. 19.

**Beispiel 9.** Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die parallel auf sie auffallenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

307) $$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$$

vorgeschriebene Kreislinie ist.

Hier bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

308) $$\left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)^2 = k^2$$

und wenn man differentiirt, so gibt sich weiter

309) $$\left(-v \cdot y + x + (1+v^2) \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2x}{dv^2}\right) = 0$$

Lässt man die Differentialgleichung der dritten Ordnung

310) $$2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2x}{dv^2}) = 0$$

gelten; so ist (nach §. 16) die den beiden Differentialgleichungen 308) und 310) zugleich genügende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen

311) $$A^2 + B^2 = k^2$$

und

312) $$(y-B) + (x-A) \cdot v = 0$$

Jetzt substituire man für $v$ den Ausdruck 11), so setzt Gleichung 312) sich um in

313) $$(y-B) - (x-A) \cdot p = \big((y-B) \cdot p + (x-A)\big) \cdot \sqrt{\lambda^2 \quad (1+p^2) - 1}$$

und wenn man mit dieser Gleichung weiter verfährt, wie mit Gleichung 203) in § 15; so ist das allgemeine Integral durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

314) $$A^2 + B^2 = k^2$$

und

315) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(y-B)^2 + (x-A)^2} = x + E$$

oder, was dasselbe ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

316) $$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$$

und

317) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = x + E$$

dargestellt, d. h. man hat alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen oder konischer Hyperbeln, deren Hauptaxen mit der allen unseren Curven gemeinschaftlichen Abscissenaxe parallel laufen, und deren einer Brennpunkt im Umfange der vorgeschriebenen Diakaustika liegt.

Nun sind die Refractions-Curven, als Gränz-Curven der zweiten Ordnung, nicht durch allgemeine, sondern durch einfach singuläre Integrale darzustellen; und diese kann man, wie schon in §. 16 vermerkt, auf drei verschiedenen Wegen aufsuchen.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableiten will, so beachte man, dass, wie in §. 9, so auch hier

$$\int \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2} = k \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

ist; und so specialisiren sich die (in §. 16 aufgestellten) zwei Gleichungen 227) und 229) diesmal in

318) $$(y-\mathfrak{y}) + (x-\mathfrak{x}) \cdot \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = 0$$

und

319) $$\mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = x + K \pm \lambda \cdot k \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Um nun das $x$ als Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auszudrücken, eliminire man die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 318) und 319); so bekommt man

320) $$\frac{\mp (x-\mathfrak{x}) \cdot \lambda \cdot \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} = x + K \pm \lambda \cdot k \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

kk *

Um ferner auch das $y$ als Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auszudrücken, addire man auf der rechten Seite der letzten Gleichung die identische Differenz $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x})$; so gibt sich

321) $$\frac{\mp (x-\mathfrak{x}) \,.\, \lambda \,.\, \sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} + (x-\mathfrak{x}) + K \pm \lambda k \,.\, \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Nun folgt aus 318), dass

322) $$(x-\mathfrak{x}) = -(y-\mathfrak{y}) \,.\, \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$$

und wenn man jetzt die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ aus 321) eliminirt, so gibt sich weiter

323) $$\frac{\pm (y-\mathfrak{y}) \,.\, \lambda \,.\, \sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - (y-\mathfrak{y}) \,.\, \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} + K \pm \lambda \,.\, k \,.\, \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

Man kann aber, wegen Gleichung 307), auch $k^2$ statt $(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)$, und folglich auch $k$ statt $\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}$ setzen; und so kann man 320) und 323) umformen in

324) $$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda \,.\, k}{\mathfrak{y}} \,.\, x = K \mp \lambda \,.\, k \,.\, \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

und

325) $$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda \,.\, k}{\mathfrak{x}} \,.\, y = -K - \frac{k^2}{\mathfrak{x}} \mp \lambda \,.\, k \,.\, \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 307), 324), 325) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausgedrückt sind, so können die Refractions-Curven mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man aus 307) und 324) das $\mathfrak{y}$ oder das $\mathfrak{x}$ eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{x}$ und im zweiten Falle das $\mathfrak{y}$ als Function von $x$ und $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung der drei Gleichungen 307), 324), 327) ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zweite Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus der ersten Stammgleichung ableiten will, so muss man die zwei Gleichungen 311) und 312) zu Hülfe nehmen; und dabei specialisirt sich Gleichung 235) in

326) $$y + v \,.\, x = \mp k \,.\, \sqrt{1+v^2}$$

Das nächste Geschäft ist jetzt, dass man sich überzeugt, ob von der Gleichung 326) auch die 308) erfüllt wird, und ob das zu 326) gehörige Integral ein einfach singuläres oder ein einfach particuläres ist. Aus 326) folgt der Reihe nach

327) $$y = -v \,.\, x \mp k \,.\, \sqrt{1+v^2}$$

328) $$p = -v + \left(-x \mp \frac{k \,.\, v}{\sqrt{1+v^2}}\right) \,.\, \frac{dv}{dx}$$

329) $$\frac{dp}{dx} = -2 \,.\, \frac{dv}{dx} + \left(-x \mp \frac{k \,.\, v}{\sqrt{1+v^2}}\right) \,.\, \frac{d^2v}{dx^2} \mp \frac{k}{(\sqrt{1+v^2})^3} \,.\, \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

Wenn man die hier für $y$ und $p$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 308) substituirt, so wird diese identisch, d. h. Gleichung 308) wird von dem zu 326) gehörigen Integral erfüllt.

Wenn man ebenso die hier für $p$ und $\frac{dp}{dx}$ hergestellten Ausdrücke in Gleichung 310) substituirt, so reducirt sich dieselbe auf

330) $$\mp \frac{k}{(\sqrt{1+v^2})^3} \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

und weil letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst trägt, so ist man überzeugt, dass das zu 326) gehörige Integral wirklich ein einfach singuläres der Gleichung 308) ist. Um jedoch Gleichung 326) weiter behandeln zu können, muss man für $v$ den (in §. 3 aufgestellten) Ausdruck 11) zurückführen; und dabei geht Gleichung 326) über in

331) $$y - \frac{p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{1 - p . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . x = \mp \lambda . k . \frac{1 + p^2}{1 - p . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}$$

Diese Gleichung nimmt eine bequemere Form an, wenn man bei beiden Brüchen Zähler und Nenner mit $\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right)$ multiplicirt; denn dadurch bekommt man

332) $$y - \frac{(\lambda^2-1) . (1+p^2)}{\left(-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . (1+p^2)} . x = \pm \lambda . k . \frac{\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . (1+p^2)}{\left(-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . (1+p^2)}$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(1+p^2)$ unterdrückt,

333) $$y - \frac{\lambda^2 - 1}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . x = \pm \lambda . k . \frac{p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}$$

Man differentiire, und ziehe hierauf die beiden ersten Theilsätze zusammen, so gibt sich

334) $$\frac{\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . dx + \frac{\lambda^2 . (\lambda^2-1) . \left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . x}{\left(-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . dp$$
$$= \pm \lambda . k . d\left(\frac{p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}\right)$$

oder, indem man diese ganze Gleichung mit $\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right)$ dividirt,

335) $$\frac{\sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . dx + \frac{\lambda^2 . (\lambda^2-1) . x}{\left(-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . dp$$
$$= \pm \lambda . k . \frac{1}{p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . d\left(\frac{p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 (1+p^2) - 1}}\right)$$

Diese Gleichung ist integrabel, und liefert ohneweiters

336)
$$\frac{\sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . x = L \pm \lambda . k . \left(\frac{1}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} + \int \frac{dp}{\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}\right)$$

Nun multiplicire man Zähler und Nenner des noch nicht integrirten Theilsatzes mit $\left(p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right)$, so bekommt man

$$\int \frac{dp}{\left(p - \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}\right) . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} . \int \left(\frac{dp}{1+p^2} + \frac{p . dp}{(1+p^2) . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}\right)$$
$$= -\frac{1}{\lambda^2 - 1} . \left(\operatorname{arc\,tg} p + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\lambda^2 . (1+p_2) - 1}\right)$$
$$= -\frac{1}{\lambda^2 - 1} . \operatorname{arc\,tg} \frac{p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{1 - p . \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}$$
$$= -\frac{1}{\lambda^2 - 1} . \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda^2 \quad 1}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}$$
$$= +\frac{1}{\lambda^2 - 1} . \operatorname{arc\,tg} \frac{-(\lambda^2-1)}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}$$

und Gleichung 336) geht über in

$$337)\ \frac{\sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} . x = L \pm \lambda k . \left( \frac{1}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} . \operatorname{arc\,tg} \frac{-(\lambda^2 - 1)}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} \right)$$

und wenn man $x$ aus 333) und 337) eliminirt, so gibt sich weiter

$$338)\quad \frac{\sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}}{\lambda^2 - 1} . y = L \pm \frac{\lambda k .}{\lambda^2 - 1} . \left( p + \operatorname{arc\,tg} \frac{-(\lambda^2 - 1)}{-\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1}} \right)$$

(Man vergleiche den Zusatz am Ende dieses §'s, wo der Werth $\lambda = -1$ besprochen werden wird.)

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen 337) und 338) hat man, wegen des Integrations-Constanten $L$, abermals eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenaxe auffallen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$ erzeugt wird; und weil $x$ und $y$ als Functionen von $p$ ausgedrückt sind, so können alle durch die Verbindung von 337) und 338) dargestellten Refractions-Curven mittels ihrer Tangenten construirt werden.

Dass aber aus der Verbindung von 337) und 338) dieselben Curven hervorgehen, wie aus der Verbindung der Gleichungen 324) und 325); davon überzeugt man sich auf folgende Weise:

In Folge der Gleichungen 223), 224), 225) ist bekannt, dass, es mögen die Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $E$ von $x$ unabhängig oder von $x$ abhängig sein, der für $p$ hervorgehende Ausdruck sich jedesmal auf

$$339)\quad p = \frac{-\lambda . (x - \mathfrak{x}) \mp \sqrt{(x - \mathfrak{x})^2 + (y - \mathfrak{y})^2}}{\lambda . (y - \mathfrak{y})}$$

reducirt; und daraus folgt, dass

$$340)\quad \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = \frac{-(x - \mathfrak{x}) \mp \lambda . \sqrt{(x - \mathfrak{x})^2 + (y - \mathfrak{y})^2}}{(y - \mathfrak{y})}$$

und

$$341)\quad -\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = \frac{(\lambda^2 - 1) . (x - \mathfrak{x})}{(y - \mathfrak{y})}$$

ist. Nun folgt aus 318), dass

$$342)\quad (y - \mathfrak{y}) = -(x - \mathfrak{x}) . \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$$

und sonach gehen die drei Gleichungen 339), 340), 341) bezüglich über in

$$343)\quad p = \frac{-\lambda . \mathfrak{y} \mp \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}}{-\lambda . \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \pm \frac{k}{\lambda . \mathfrak{x}}$$

$$344)\quad \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = \frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda . \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}}{-\mathfrak{x}} = \frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda . k}{-\mathfrak{x}}$$

$$345)\quad -\lambda^2 . p + \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = -(\lambda^2 - 1) . \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$$

Man substituire jetzt die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 337), so geht diese über in

$$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda . k}{(\lambda^2 - 1) . \mathfrak{y}} . x = L \mp \frac{\lambda . k}{\lambda^2 - 1} . \left( \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} \right)$$

oder, wenn man Alles mit $(\lambda^2 - 1)$ multiplicirt, in

$$346)\quad \frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda . k}{\mathfrak{y}} . x = (\lambda^2 - 1) L . \mp \lambda . k . \left( \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} \right)$$

Wenn man ebenso die betreffenden Ausdrücke in Gleichung 338) substituirt, so geht diese über in

$$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda \,.\, k}{-(\lambda^2-1) \,.\, \mathfrak{x}} \,.\, y = L \pm \frac{\lambda \,.\, k}{\lambda^2-1} \,.\, \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \pm \frac{k}{\lambda \,.\, \mathfrak{x}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

oder, wenn man Alles mit — $(\lambda^2-1)$ multiplicirt, in

347) $$\frac{-\mathfrak{y} \mp \lambda \,.\, k}{\mathfrak{x}} \,.\, y = -(\lambda^2-1) \,.\, L - \frac{k^2}{\mathfrak{x}} \mp \lambda \,.\, k \,.\, \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

Endlich setze man noch $K$ anstatt $(\lambda^2-1) \,.\, L$, so fallen die Gleichungen 346) und 347) genau mit 324) und 325) zusammen, wie zu beweisen war.

Dritte Methode. Man kann das einfach singuläre Integral auch gewinnen, wenn man bei Gleichung 309) den ersten Factor zu Null werden, d. h. wenn man die Gleichung

348) $$-v \,.\, y + x + (1+v^2) \,.\, (v+p) \,.\, \frac{dx}{dv} = 0$$

gelten lässt. Daraus folgt

349) $$(v+p) \,.\, \frac{dx}{dv} = \frac{v \,.\, y - x}{1+v^2}$$

und wenn man diesen für $(v+p) \,.\, \frac{dx}{dv}$ hergestellten Ausdruck in Gleichung 308) substituirt, so geht diese über in

$$(y + v \,.\, x)^2 = (1+v^2) \,.\, k^2$$

und daraus folgt

350) $$y + v \,.\, x = \mp k \,.\, \sqrt{1+v^2}$$

Nun muss man untersuchen, ob von 350) auch den beiden Gleichungen 308) und 348) zugleich genügt wird, und ob das zu 350) gehörige Integral ein einfach singuläres oder nur ein einfach particuläres ist. Weil aber die Gleichung 350) mit 326) zusammenfällt, so ist auch der weitere Verlauf dieser dritten Methode ganz derselbe, wie bei der zweiten.

Zusatz. Wenn man die hier (§. 19) befindlichen refractorischen Resultase dadurch, dass man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 9) verwandeln will; so hat dieses bei der ersten Methode keinen Anstand. Bei der zweiten Methode aber bekommen die Gleichungen 332), 333) etc. Null in den Nenner. Man muss also — 1 statt $\lambda$ schon in Gleichung 331) einsetzen, und erst dann darf man integriren, wodurch man wieder zu den Resultaten gelangt, wie bei der zweiten Methode des §. 9.

## Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der Refractions-Curven für von einem leuchtenden Punkte herkommende Lichtstrahlen.

### §. 20.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in einem einzigen Punkt (Brennpunkt) zusammenzieht.

Man richte das Coordinatensystem der gesuchten Refractions-Curve so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn dabei die Coordinaten des vorgeschriebenen Brennpunktes die festen Werthe $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ haben, so specialisiren sich für dieselben die Gleichung 9) und 10) bezüglich in

$$351) \qquad \mathfrak{g} = x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und

$$352) \qquad \mathfrak{h} = y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}$$

und jede Curve, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt, hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Das nächste Geschäft ist nun, eine erste Stammgleichung aufzusuchen, welche diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugleich genügt; und wenn man hier wie in §. 15 verfährt, so bekommt man

$$353) \qquad (y-\mathfrak{h}) + (x-\mathfrak{g}) \cdot v = 0$$

Diese erste Stammgleichung enthält keinen Integrations-Constanten; denn nur so kann sie, wie man bereits in §. 15 ersehen hat, den beiden vorgelegten Differentialgleichungen 351) und 352) zugleich genügen. Um aber die Aufgabe weiter durchführen zu können, muss man für $v$ den in §. 3 befindlichen Ausdruck 12)

$$\frac{-\big((x-g)+y \cdot p\big) \cdot p + \sqrt{\lambda^2 \cdot \big((x-g)^2+y^2\big) \cdot (1+p^2) - \big((x-g)+y \cdot p\big)^2}}{+\big((x-g)+y \cdot p\big) + p \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot \big((x-g)^2+y^2\big) \cdot (1+p^2) - \big((x-y)+y \cdot p\big)^2}}$$

in welchem durch $g$ die Abscisse des leuchtenden Punktes dargestellt ist, zurückführen. Dabei geht Gleichung 353) über in

$$354) \qquad \big((x-\mathfrak{g}) \cdot p - (y-\mathfrak{h})\big) \cdot \big((x-g) + y \cdot p\big)$$
$$= \big((x-\mathfrak{g}) + (y-\mathfrak{h}) \cdot p\big) \cdot \sqrt{\lambda^2 \cdot \big((x-g)^2 + y^2\big) \cdot (1+p^2) - \big((x-g) + y \cdot p\big)^2}$$

Nun erhebe man beiderseits auf das Quadrat, so ergibt sich eine Gleichung, welche man auf folgende Weise anordnen kann:

$$\big((x-\mathfrak{g})^2 + (y-\mathfrak{h})^2\big) \cdot \big((x-g) + y \cdot p\big)^2 \cdot (1+p^2) = \big((x-\mathfrak{g}) + (y-\mathfrak{h}) \cdot p\big)^2 \cdot \lambda^2 \cdot (1+p^2) \cdot \big((x-g)^2 + y^2\big)$$

und daraus folgt weiter

$$355) \qquad \frac{(x-g) + y \cdot p}{\sqrt{(x-g)^2 + y^2}} \mp \lambda \cdot \frac{(x-\mathfrak{g}) + (y-\mathfrak{h}) \cdot p}{\sqrt{(x-\mathfrak{g})^2 + (y-\mathfrak{h})^2}} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich ohneweiters integriren und liefert

$$356) \qquad \sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\mathfrak{g})^2 + (y-\mathfrak{h})^2} = G$$

Das den Differentialgleichungen 351) und 352) gemeinsame Urintegral ist hier nur mit einem und nicht mit zwei Integrations-Constanten versehen. Die Ursache ist schon bei Gleichung 207) angegeben.

Die hier gefundene Refractions-Curve ist im Allgemeinen eine Curve des vierten Grades, welcher sich aber auf den zweiten erniedrigt, wenn $G = 0$ ist.

Um jedoch der Gleichung 356) eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, beachte man, dass der Ausdruck $\sqrt{(x-g)^2 + y^2}$ der vom leuchtenden Punkte, und dass der Ausdruck $\sqrt{(x-\mathfrak{g})^2 + (y-\mathfrak{h})^2}$ der vom vorgeschriebenen Brennpunkte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ nach irgend einem Punkte der gefundenen Refractions-Curve gezogene Leitstrahl ist. Unsere Curve hat also in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass die zwei zusammengehörigen Leitstrahlen in einer von den Coordinaten unabhängigen Beziehung zusammen stehen.

Zusatz. Die für die Refractions-Curve gefundene Gleichung 356) geht, wenn man $\lambda = -1$ setzt, wieder über in die für die Reflexions-Curve gefundene Gleichung 159). Alsdann darf aber, wie schon (in §. 10) auseinandergesetzt ist, bei dem Doppelzeichen nur das obere genommen werden.

## §. 21.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr eine bestimmt vorgeschriebene Curve als Diakaustika zukommt.

Auch hier richte man das Coordinatensystem so ein, dass die Abscissenaxe durch den leuchtenden Punkt geht; und wenn sich dann für die vorgeschriebene Diakaustika die bestimmte Gleichung

$$357) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

ergibt, so hat man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Ausdrücke 9) und 10) einzuführen; und man bekommt für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$358) \qquad \mathfrak{F}\left\{\left(x + (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right), \left(y - v \cdot (v+p) \cdot \frac{dx}{dv}\right)\right\} = 0$$

Man bediene sich auch hier der schon im §. 16 angewendeten Abkürzungszeichen $Q$ und $R$, und differentiire 358); so bekommt man auch hier

$$359) \qquad \left(\frac{d_Q\mathfrak{F}}{dQ} - v \cdot \frac{d_R\mathfrak{F}}{dR}\right) \cdot \left(2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2}\right) = 0$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, entweder wenn

$$360) \qquad 2 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} - (v+p) \cdot \frac{d^2v}{dv^2} = 0$$

oder wenn

$$361) \qquad \frac{d_Q\mathfrak{F}}{dQ} - v \cdot \frac{d_R\mathfrak{F}}{dR} = 0$$

Die Differentialgleichung 360), welche von der dritten Ordnung ist, führt hier ebenso, wie in §. 16, zu folgender Verbindung zweier Gleichungen:

$$362) \qquad \mathfrak{F}(A, B) = 0$$

und

$$363) \qquad (y-B) + (x-A) \cdot v = 0$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen ist die erste Stammgleichung zu 358); und weil $A$ und $B$ in der durch 362) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ aus 363) eliminiren, wodurch man eine erste Stammgleichung mit nur einem Integrations-Constanten bekommt.

Um nun die Gleichung 363) weiter behandeln zu können, muss man für $v$ den im §. 3 befindlichen Ausdruck 12) zurückführen; und dabei geht 363) über in

$$364)\quad \Big((x-A)\cdot p-(y-B)\Big)\cdot\Big((x-g)+y\cdot p\Big)$$
$$=\Big((x-A)+(y-B)\cdot p\Big)\cdot\sqrt{\lambda^2\cdot\Big((x-g)^2+y^2\Big)\cdot(1+p^2)-\Big((x-g)+y\cdot p\Big)^2}$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 354) in §. 20; so bekommt man die Urgleichung

$$365)\qquad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2}=G$$

Hier erscheinen sogar drei Integrations-Constanten $A$, $B$, $G$, während die vorgelegte Differentialgleichung 358) nur von der zweiten Ordnung ist. Weil jedoch $A$ und $B$ in der durch 362) ausgesprochenen Abhängigkeit zu einander stehen, so kann man entweder $A$ oder $B$ eliminiren, und eine Urgleichung mit nur zwei Integrations-Constanten herstellen.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 357) und 362) mit einander, so erkennt man, dass zwischen $A$ und $B$ dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Man kann also statt der Integrations-Constanten $A$ und $B$ auch die zur vorgeschriebenen Diakaustika gehörigen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ setzen; und dabei geht 365) über in

$$366)\qquad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}=G$$

Die hier gefundene Gleichung stellt also im Allgemeinen Curven des vierten Grades dar, welcher sich aber auf den zweiten erniedrigt, wenn $G=0$ ist.

Vergleicht man die (im §. 20 befindliche) Gleichung 356) mit der hier gefundenen Gleichung 366), so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Lichtstrahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ concentriren mussten, hier die gebrochenen Lichtstrahlen sich im Brennpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier vorgeschriebenen Diakaustika $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})=0$ ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch 366) dargestellten Curven. Somit ist unter allen diesen Curven keine einzige im Stande, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige der hier gefundenen Curven ist die gesuchte Refractions-Curve. Man muss also untersuchen, ob unter den, durch 366) dargestellten, unendlich vielen Curven-Schaaren solche Reihen stetig nebeneinander liegender Curven vorkommen, die sich so schneiden, dass die Durchschnitts-Curven auch noch der Differentialgleichung 358) genügen, und zugleich in allen ihren Punkten mit irgend einer der sich schneidenden Curven eine Berührung der zweiten Ordnung eingehen. Alle diese Durchschnitts-Curven sind also Gränz-Curven der zweiten Ordnung, und werden, wie in der analytischen Geometrie näher nachgewiesen werden muss, durch das einfach singuläre Integral dargestellt. Dieses kann bekanntlich auf drei verschiedenen Wegen ermittelt werden.

Erste Methode. Wenn man das einfach singuläre Integral aus dem allgemeinen ableiten will, so beachte man, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Curven; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 366) differentiirt, so bekommt man

$$367)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\lambda\cdot(x-\mathfrak{x})\cdot\sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp(x-g)\cdot\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}{\lambda\cdot(y-\mathfrak{y})\cdot\sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp y\cdot\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen $x$ von sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 366) nach allem $x$ differentiirt, so bekommt man jetzt

368) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda\,.\,(x-\mathfrak{x})\,.\,\sqrt{(x-g)^2+y^2} \mp (x-g)\,.\,\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}{\lambda\,.\,(y-\mathfrak{y})\,.\,\sqrt{(x-g)^2+y^2} \mp y\,.\,\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}}$$
$$+ \frac{\lambda\,.\,\left((y-\mathfrak{y})\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})\right)\frac{d\mathfrak{x}}{dx} \mp \left(\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}\right)\frac{dG}{dx}}{\lambda\,.\,(x-\mathfrak{x})\,.\,\sqrt{(x-g)^2+y^2} \mp y\,.\,\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}} \,.\, \sqrt{(x-g)^2+y^2}$$

Damit aber aus 367) und 368) sich für $\frac{dy}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben können, muss die Gleichung

369) $$\lambda\,.\,\left((y-\mathfrak{y})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x})\right)\,.\,\frac{d\mathfrak{x}}{dx} \mp \left(\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}\right)\,.\,\frac{dG}{dx} = 0$$

stattfinden. Differentiirt man die Gleichung 367) noch einmal sowohl nach allem explicit als auch nach allem implicit in $y$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ enthaltenen $x$; so bekommt man neben der Gleichung 369) auch noch

370)
$$\lambda\,.\left((y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right).\left((x-g)\,.\,(x-\mathfrak{x}) + y\,.\,(y-\mathfrak{y}) \mp \left(\sqrt{(x-g)^2+y^2}\right).\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}\right).\frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

371) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

und hiermit wird diejenige Grade dargestellt, welche durch den Punkt $(x, y)$ der gesuchten Refractions-Curve geht, und zugleich die zum Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der vorgeschriebenen Diakaustika gehörige Tangente ist. Jede Diakaustika ist ja, wie schon im §. 1 auseinander gesetzt wurde, eine einhüllende Gränz-Curve.

Eliminirt man jetzt mittels 371) die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 369), so fällt auch die Differenz $(x-\mathfrak{x})$ hinweg; und 369) geht über in

$$\lambda\,.\,(d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2) \mp \left(\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^3}\right).\,dG = 0$$

oder in

$$\lambda\,.\,\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2} \mp dG = 0$$

Daraus folgt

$$dG = \pm\,\lambda\,.\,\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

oder

372) $$G = K \pm \lambda\,.\int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

wo $K$ ein Integrations-Constanter ist. Gleichung 366) geht also über in

373) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2} \mp \lambda\,.\,\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2} = K \pm \lambda\,.\int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

Mit dieser Gleichung, wo bei den Doppelzeichen durchweg die oberen und ebenso durchweg die unteren zusammengehören, muss man aber noch folgende drei

371) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x})\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

357) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

374) $$\frac{d_{\mathfrak{x}}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{x}} + \frac{d_{\mathfrak{y}}\mathfrak{F}}{d\mathfrak{y}}\,.\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$$

verbinden, d. h. man muss die in 373) angezeigte Integration ausführen, und sodann die drei Bestandtheile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{y}$ eliminiren. Dabei fällt auch $d\mathfrak{x}$ mit hinweg, und es ergibt sich eine Gleichung zwischen $x$, $y$ und dem Integrations-Constanten $K$. Diese neue Gleichung ist aber ein einfach singuläres Urintegral zu 358); und durch dasselbe ist, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven dargestellt, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von dem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die bestimmt vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ erzeugt wird.

Zweite Methode. Zu dem einfach singulären Integral kann man auch mittels der ersten Stammgleichung gelangen. Man beachte also wiederum, dass die Integrations-Constanten von $x$ und von $y$ unabhängig sind bei allen sich schneidenden Curven; und wenn man in dieser engen Beziehung die Gleichung 363) differentiirt, und dabei sich erinnert, dass $v$ diesmal eine Function von $x$, $y$, $p$ ist; so bekommt man

375) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{(v+p) + (x-A)\cdot\left(\frac{d_x v}{dx} + \frac{d_y v}{dy}\cdot p\right)}{(x-A)\cdot\frac{d_p v}{dp}}$$

Dagegen müssen die Integrations-Constanten Functionen von $x$ sein bei allen Gränz-Curven; und wenn man in dieser weiteren Beziehung die Gleichung 363) nach allem $x$ differentiirt, so bekommt man jetzt

376) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{(v+p) + (x-A)\cdot\left(\frac{d_x v}{dx} + \frac{d_y v}{dy}\cdot p\right)}{(x-A)\cdot\frac{d_p v}{dp}} + \frac{\frac{dB}{dA} + v}{(x-A)\cdot\frac{d_p v}{dp}}\cdot\frac{dA}{dx}$$

Damit aber aus 375) und 376) für $\frac{dp}{dx}$ zwei ebenförmige Ausdrücke sich ergeben können, muss die Gleichung

377) $$\frac{dB}{dA} + v = 0$$

stattfinden. Nun folgt aus 362) die Differentialgleichung

378) $$\frac{d_A\mathfrak{F}}{dA} + \frac{d_B\mathfrak{F}}{dB}\cdot\frac{dB}{dA} = 0$$

und wenn man aus den vier Gleichungen 362), 363), 377), 378) die drei Bestandtheile $A$, $B$, $\frac{dB}{dA}$ eliminirt, so bekommt man endlich

379) $$y + v\,.\,x = \psi(v)$$

wo die Form des Ausdruckes $\psi(v)$ abhängig ist von $\mathfrak{F}(A, B) = 0$. Hier hat man für $v$ noch seinen Ausdruck

$$\frac{-\left((x-g)+y\cdot p\right)\cdot p + \sqrt{\lambda^2\cdot\left((x-g)^2+y^2\right)\cdot(1+p^2) - \left((x-g)+y\cdot p\right)^2}}{+\left((x-g)+y\cdot p\right) + p\cdot\sqrt{\lambda^2\cdot\left((x-g)^2+y^2\right)\cdot(1+p^2) - \left((x-g)+y\cdot p\right)^2}}$$

zurückzuführen, und die sich ergebende Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren. Dadurch gelangt man zu der nämlichen mit $x$, $y$, und dem Integrations-Constanten $K$ versehenen Urgleichung, wie bei der ersten Methode.

Dritte Methode. Lässt man die Gleichung 361), d. h. die Gleichung

380) $$\frac{d_Q\mathfrak{F}}{dQ} - r \cdot \frac{d_R\mathfrak{F}}{dR} = 0$$

gelten, so hat man jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; und man muss eine solche der ersten Ordnung aufsuchen, von welcher die beiden Gleichungen 358) und 380) zugleich erfüllt werden. Die hier aufzusuchende Differentialgleichung erster Ordnung wird aber genau wieder die Gleichung 379) sein, durch deren Integration sich also auch die nämliche mit $x$, $y$ und dem Integrations-Constanten $K$ versehene Urgleichung ergibt, wie bei der zweiten Methode.

(Man vergleiche die dritte Methode in §. 17, §. 18, §. 19.)

Anmerkung. In speciellen Fällen werden durch die zweite und dritte Methode grosse Weitläufigkeiten veranlasst; und desshalb sollen die in §. 22, §. 23, §. 24 nachfolgende Beispiele nur nach der ersten Methode ausgeführt werden.

Zusatz. Alle hier (§. 21) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 11) über. Alsdann dürfen aber, wie schon (in §. 10 und §. 11) auseinander gesetzt ist, bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

## §. 22.

**Beispiel 10.** Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch die Gleichung

381) $$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

vorgeschriebene semikubische Parabel ist.

Hier ist (nach §. 21) das allgemeine Integral durch die Verdindung der folgenden zwei Gleichungen

382) $$B^3 = h \cdot A^2$$

und

383) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

oder, was dasselbe ist, durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen

384) $$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

und

385) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = G$$

dargestellt, d. h. jeder einzelne Punkt der vorgeschriebenen Diakaustika $\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$ ist ein Brennpunkt zu irgend einer dieser Curven. Keine einzige derselben ist jedoch im Stande, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, d. h. keine einzige derselben ist die gesuchte Refractions-Curve, welche, als Gränz-Curve der zweiten Ordnung, nur durch ein einfach singuläres Integral dargestellt werden kann. Zu diesem Ende specialisiren die Gleichungen 371) und 373) sich diesmal in

386) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x}) \cdot \frac{2\mathfrak{y}}{3\mathfrak{x}} = 0$$

und

387) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \cdot \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = K \pm \lambda \left(\frac{1}{3} + \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) \cdot \sqrt{9\mathfrak{x}^2 + 4\mathfrak{y}^2}$$

Durch die Verbindung der drei Gleichungen 381), 386), 387) hat man, wegen des Integrations-Constanten $K$, eine Reihe stetig aufeinander folgender Refractions-Curven, von welchen allen, sobald die ursprünglichen Lichtstrahlen von dem leuchtenden Punkte, dessen Abscisse $= g$ ist, herkommen, die vorgeschriebene Diakaustika $\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$ erzeugt wird; und weil man $x$ und $y$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ausdrücken kann, so können die Refractions-Curven auch mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construirt werden.

Auch ist zu bemerken, dass, je nachdem man entweder $y$ und $\mathfrak{y}$, oder $y$ und $\mathfrak{x}$ aus den drei Gleichungen 381), 386), 387) eliminirt, im ersten Falle das $\mathfrak{x}$, und im zweiten Falle das $\mathfrak{y}$ als Function von $x$ und $K$ erscheint; und somit ist nachgewiesen, dass die Verbindung dieser drei Gleichungen ein einfach singuläres und nicht ein einfach particuläres Integral ist.

Zusatz. Alle hier (§. 22) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 12) über. Alsdann dürfen aber bei den Doppelzeichen nur die oberen gewonnen werden.

## §. 23.

**Beispiel 11.** Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte hervorkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch die Gleichung

388) $$\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$$

vorgeschriebene konische Parabel ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen 371) und 373) bezüglich in

389) $$(y-\mathfrak{y}) - (x-\mathfrak{x}) \,.\, \frac{h}{\mathfrak{y}} = 0$$

und

390) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2} \mp \lambda \,.\, \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2} = K \pm \lambda \,.\, \left(\frac{\mathfrak{y} \,.\, \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2h} - \frac{h}{2} \,.\, \mathrm{lgnat}\, \frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und man kann die gesuchte Refractions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

Zusatz. Alle hier (§. 23) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 13) über. Alsdann dürfen aber bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

## §. 24.

**Beispiel 12.** Man sucht diejenige Refractions-Curve, bei welcher die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass die zugehörige Diakaustika die durch folgende Gleichung

391) $$\mathfrak{y}^{\frac{2}{3}} + \mathfrak{x}^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

vorgeschriebene Hypokykloide ist.

Hier specialisiren sich die Gleichungen 371) und 373) bezüglich in

392) $$(y-\mathfrak{y}) \,.\, \sqrt[3]{\mathfrak{x}} + (x-\mathfrak{x}) \,.\, \sqrt[3]{\mathfrak{y}} = 0$$

und

393) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2} \mp \lambda \,.\, \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2} = K \pm \frac{3\lambda}{2} \,.\, \sqrt[3]{k \,.\, \mathfrak{x}^2}$$

und man kann die hier gesuchte Refractions-Curve mittels der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

Zusatz. Alle hier (§. 24) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 14) über. Alsdann dürfen aber bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

# NACHTRAG.

## §. 25.

Schon in der Einleitung (§. 1) wurde mittels geometrischer Betrachtung nachgewiesen, dass einer graden Linie niemals die Eigenschaft einer Brennlinie zukommen könne. Nun soll auf analytischem Wege nachgewiesen werden, dass, wenn eine grade Linie als Brennlinie vorgeschrieben wird, weder eine Reflexions- noch eine Refractions-Curve existirt.

## §. 26.

Man sucht diejenige Reflexions-Curve, von welcher die Lichtstrahlen so zurückgeworfen werden, dass ihr die durch folgende Gleichung

394) $$\mathfrak{y} = m \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{A}$$

vorgeschriebene Grade als Katakaustika zukommt.

Wenn man (aus §. 2) für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Ausdrücke 2) und 3) hier einführt, so bekommt man für die gesuchte Reflexions-Curve folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

395) $$y - mx - \mathfrak{A} + (u-m) \cdot (u-p) \cdot \frac{dx}{du} = 0$$

### Erste Auflösung.

Um letztere Gleichung direct zu integriren, multiplicire man sie mit $du$; so setzt sie sich um in

396) $$m \cdot dy - mu \cdot dx - mx \cdot du - u \cdot dy + u^2 \cdot dx + y \cdot du - \mathfrak{A} \cdot du = 0$$

Man addire die identische Differenz

$$u \cdot x \cdot du - u \cdot x \cdot du$$

so bekommt man weiter

397) $$(m-u) \cdot (dy - u \cdot dx - x \cdot du) + (y - ux - \mathfrak{A}) \cdot du = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{1}{(m-u)^2}$; denn dabei geht sie über in

398) $$\frac{(m-u) \cdot (dy - u \cdot dx - x \cdot du) + (y - ux - \mathfrak{A}) \cdot du}{(m-u)^2} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

399) $$\frac{y-u\,.\,x-\mathfrak{A}}{m-u} = A$$

oder

400) $$y-(mA+\mathfrak{A}) = (x-A)\,.\,u$$

Um nun diese Differentialgleichung erster Ordnung weiter behandeln zu können, muss man unterscheiden, ob die auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel laufen, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen.

Erster Fall. Wenn die auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so muss man (aus §. 2) für $u$ den Ausdruck 4) hier einführen; und dabei geht Gleichung 400) über in

401) $$\big(y-(mA+\mathfrak{A})\big)\,.\,(1-p^2) = 2\,.\,(x-A)\,.\,p$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 20) in §. 5; so bekommt man die Urgleichung

402) $$\pm\sqrt{\big(y-(mA+\mathfrak{A})\big)^2+(x-A)^2} = x+E$$

wo $A$ und $E$ die beiden Integrations-Constanten sind. Setzt man hier $\mathfrak{x}$ statt $A$, so geht letztere Gleichung über in

403) $$\pm\sqrt{\big(y-(m\,.\,\mathfrak{x}+\mathfrak{A})\big)^2+(x-\mathfrak{x})^2} = x+E$$

oder, wegen Gleichung 394), in

404) $$\pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2} = x+E$$

Dadurch sind aber alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Parabeln dargestellt, deren Brennpunkt jeder in der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden 394) liegende Punkt sein kann, und deren Hauptaxen mit den Lichtstrahlen parallel sein müssen. Man vergleiche §. 6. Dort ist auch auseinander gesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Parabeln im Stande ist, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zu der gesuchten Reflexions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curven der zweiten Ordnung aufsuchen müsse; und wenn man hierzu die (in §. 6 mitgetheilte) erste Methode anwenden will, so gehen die dortigen zwei Gleichungen 42) und 44) diesmal über in

405) $$(y-\mathfrak{y})-(x-\mathfrak{x})\,.\,m = 0$$

und

406) $$\pm\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2} = x+K\mp\mathfrak{x}\,.\,\sqrt{1+m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 405) und 406), so bekommt man

$$\pm\,(x-\mathfrak{x})\,.\sqrt{1+m^2} = x+K\mp\mathfrak{x}\,.\,\sqrt{1+m^2}$$

oder

407) $$x\cdot\big(-1\pm\sqrt{1+m^2}\big) = K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil $\mathfrak{y}$ aus 394) und 405), so fällt auch $\mathfrak{x}$ mit hinweg; und es bleibt nur

408) $$y = m\,.\,x+\mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles $\mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x}$ mit hinwegfällt, so ist es unmöglich zwischen der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden und zwischen einer als Reflexions-Curve gesuchten Curve irgend eine Relation herzustellen.

„Es existirt also bei parallel auffallenden Lichtstrahlen keine Reflexions-Curve, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört."

Zweiter Fall. Wenn die auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallenden Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte herkommen, so muss man (aus §. 2) für $u$ den Ausdruck 5) einsetzen; und dabei geht Gleichung 400) über in

409) $$\big(y-(m\,.\,A+\mathfrak{A})\big)\,.\,\big(2yp+(x-g)\,.\,(1-p^2)\big)=(x-A)\,.\,\big(2(x-g)\,.\,p-y\,.\,(1-p^2)\big)$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 155) in §. 10; so bekommt man die Urgleichung

410) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{\big(y-(mA+\mathfrak{A})\big)^2+(x-A)^2}=G$$

wo $A$ und $G$ die zwei Integrations-Constanten sind.

Hier müssen beide Radicale als positiv genommen werden, weil, wie in §. 10 und in §. 11 nachgewiesen ist, die konischen Hyperbeln nicht beachtet werden dürfen.

Setzt man $\mathfrak{x}$ statt $A$, so geht letztere Gleichung über in

411) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{\big(y-(m\,.\,\mathfrak{x}+\mathfrak{A})\big)^2+(x-\mathfrak{x})^2}=G$$

oder, wegen Gleichung 394), in

412) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2}=G$$

Dadurch sind aber alle jene unendlich vielen Schaaren konischer Ellipsen dargestellt, deren einer Brennpunkt der leuchtende Punkt sein muss, und deren anderer Brennpunkt jeder in der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden 394) liegende Punkt sein kann. Nun ist bereits (in §. 11) auseinander gesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Ellipsen im Stande ist, von der vorgeschriebenen Katakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zur gesuchten Reflexions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curve der zweiten Ordnung aufsuchen müsse. Zu diesem Ende gehen die in §. 11 befindlichen zwei Gleichungen 175) und 177) diesmal über in

413) $$(y-\mathfrak{y})-(x-\mathfrak{x})\,.\,m=0$$

und

414) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2}=K-\mathfrak{x}\,.\,\sqrt{1+m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 413) und 414), so bekommt man

$$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+(x-\mathfrak{x})\,.\,\sqrt{1+m^2}=K-\mathfrak{x}\,.\,\sqrt{1+m^2}$$

oder

415) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+x\,.\,\sqrt{1+m^2}=K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil $\mathfrak{y}$ aus 394) und 413), so fällt auch $\mathfrak{x}$ mit hinweg; und es bleibt nur

416) $$y=mx+\mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles $\mathfrak{y}$ auch das $\mathfrak{x}$ mit hinwegfällt, so ist es auch diesmal unmöglich, zwischen der als Katakaustika vorgeschriebenen Graden und zwischen einer als Reflexions-Curve gesuchten Curve irgend eine Relation herzustellen.

„Es existirt also auch bei den von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen keine Reflexions-Curve, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.“

**Zweite Auflösung.**

Man differentiire Gleichung 395) nach allem $x$, so bekommt man

417) $$(u-m)\cdot\left(2-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{du}-(u-p)\cdot\frac{d^2u}{du^2}\right)=0$$

und dieser Gleichung wird genügt, entweder wenn

418) $$2-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{du}-(u-p)\cdot\frac{d^2u}{du^2}=0$$

oder wenn

419) $$u-m=0$$

Erstens. Lässt man Gleichung 418) gelten, so bekommt man durch Integration

420) $$(y-B)=(x-A)\cdot u$$

während, damit der vorgelegten Differentialgleichung 395) genügt wird, zwischen den beiden Integrations-Constanten $A$ und $B$ folgende Relation

421) $$B=m\cdot A+\mathfrak{A}$$

stattfinden muss. Um nun die Differentialgleichung 420) nochmals integriren zu können, muss man von jetzt an unterscheiden, ob die Lichtstrahlen parallel auf die gesuchte Reflexions-Curve auffallen, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen. Dabei ergibt sich im ersten Falle (nach §. 6)

422) $$\pm\sqrt{(y-B)^2+(x-A)^2}=x+E$$

und im zweiten Falle ergibt sich (nach §. 11)

423) $$\sqrt{(x-g)^2+y^2}+\sqrt{(y-B)^2+(x-A)^2}=G$$

Man hat hiermit wiederum die vorhin in der ersten Auflösung gefundenen zwei Gleichungen 404) und 412); und diese führen also auch wiederum zu dem Resultate, dass keine Reflections-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.

Zweitens. Lässt man die Gleichung 419) gelten, so bekommt man

424) $$u=m$$

d. h. $u$ ist constant. Man muss aber vor Allem untersuchen, ob $u=m$ die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Urintegral ist, oder nicht; und zu diesem Ende eliminire man $B$ aus 420) und 421) so bekommt man

425) $$y-(m\cdot A+\mathfrak{A})=(x-A)\cdot u$$

Diese Gleichung aber reducirt sich, wenn man $m$ statt $u$ setzt, sofort auf

426) $$y=m\cdot x+\mathfrak{A}$$

Der Integrations-Constante $A$ ist also weggefallen, ohne dass er irgend eine Bestimmung gefunden hat; und daraus folgt, dass $u = m$ nicht die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Integral ist. Somit erkennt man zum zweiten Male, dass keine Reflexions-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Katakaustika angehört.

## §. 27.

Man sucht diejenige Refractions-Curve, von welcher die Lichtstrahlen so gebrochen werden, dass ihr die durch folgende Gleichung

427) $$\mathfrak{y} = m \, . \, \mathfrak{x} + \mathfrak{A}$$

vorgeschriebene Grade als Diakaustika zukommt.

Wenn man (aus §. 3) für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Ausdrücke 9) und 10) hier einführt, so bekommt man für die gesuchte Refractions-Curve folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung

428) $$y - mx - \mathfrak{A} - (v+m) \, . \, (v+p) \, . \, \frac{dx}{dv} = 0$$

### Erste Auflösung.

Um letztere Gleichung direct zu integriren, multiplicire man sie mit $dv$, und sie setzt sich um in

429) $$m.dy + mv.dx + mx.dv + v.dy + v^2.dx - y \, . \, dv + \mathfrak{A} \, . \, dv = 0$$

Man addire die identische Differenz

$$v \, . \, x \, . \, dv - v \, . \, x \, . \, dv$$

so bekommt man weiter

430) $$(v+m) \, . \, (dy + v \, . \, dx + x \, . \, dv) - (y + vx - \mathfrak{A}) \, . \, dv = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{1}{(v+m)^2}$; denn dabei geht sie über in

431) $$\frac{(v+m) \, . \, (dy + v \, . \, dx + x \, . \, dv) - (y+vx-\mathfrak{A}) \, . \, dv}{(v+m)^2} = 0$$

und daraus folgt durch Integration

432) $$\frac{y + vx - \mathfrak{A}}{v+m} = A$$

oder

433) $$\big(y - (mA + \mathfrak{A})\big) + (x - A) \, . \, v = 0$$

Um nun diese Differentialgleichung erster Ordnung weiter behandeln zu können, muss man unterscheiden, ob die auf die gesuchte Refractions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel laufen, oder von einem leuchtenden Punkt herkommen.

Erster Fall. Wenn die auf die gesuchte Refractions-Curve auffallenden Lichtstrahlen mit einander parallel sind, so muss man (aus §. 3) für $v$ den Ausdruck 11) hier einführen; und dabei geht Gleichung 433) über in

434) $$\big(x-A\big) . p - \big(y - (mA + \mathfrak{A})\big) + \Big[\big(x - A\big) + \big(y - (mA+\mathfrak{A})\big) . p\Big] \, . \, \sqrt{\lambda^2 . (1+p^2) - 1} = 0$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 203) in §. 15; so bekommt man die Urgleichung

435) $$\mp\lambda.\sqrt{\left(y-(mA+\mathfrak{A})\right)^2+(x-A)^2}=x+E$$

wo $A$ und $E$ die beiden Integrations-Constanten sind. Setzt man hier $\mathfrak{x}$ statt $A$, so geht letztere Gleichung über in

436) $$\mp\lambda.\sqrt{\left(y-(m.\mathfrak{x}+\mathfrak{A})\right)^2+(x-\mathfrak{x})^2}=x+E$$

oder, wegen Gleichung 427) in

437) $$\mp\lambda.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+x-\mathfrak{x})^2}=x+E$$

Alle hierdurch dargestellten unendlich vielen Curven-Schaaren bestehen also (nach der zu Gleichung 222) in §. 16 gemachten Erklärung) entweder aus konischen Ellipsen oder aus konischen Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2>1$ oder $\lambda^2<1$ ist.

Die Hauptaxen aller dieser Ellipsen oder Hyperbeln laufen in der Entfernung $y=\mathfrak{y}$ mit der Abscissenaxe parallel; und wenn man die in §. 15 hergestellte Gleichung 206) mit der hier gefundenen Gleichung 437) vergleicht, so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Strahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ concentriren mussten, hier die gebrochenen Strahlen sich im Brennpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier als Diakaustika vorgeschriebenen Graden ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch 437) dargestellten Ellipsen und Hyperbeln. Nun ist (ebenfalls in §. 16) auseinander gesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Ellipsen oder Hyperbeln im Stande ist, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zur gesuchten Refractions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curven der zweiten Ordnung aufsuchen müsse; und wenn man hierzu die (in §. 16 mitgetheilte) erste Methode anwenden will, so gehen die dortigen zwei Gleichungen 227) und 229) diesmal über in

438) $$(y-\mathfrak{y})-(x-\mathfrak{x}).m=0$$

und

439) $$\mp\lambda.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2}=x+K\pm\lambda.\mathfrak{x}.\sqrt{1+m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 438) und 439), so bekommt man

$$\mp\lambda.(x-\mathfrak{x}).\sqrt{1+m^2}=x+K\pm\lambda.\mathfrak{x}.\sqrt{1+m^2}$$

oder

440) $$x.\left(-1\mp\lambda.\sqrt{1+m^2}\right)=K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil $\mathfrak{y}$ aus 427) und 438), so fällt auch $\mathfrak{x}$ mit hinweg; und es bleibt nur

441) $$y=m.x+\mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles $\mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x}$ mit hinwegfällt, so ist es unmöglich, zwischen der als Diakaustika vorgeschriebenen Graden und zwischen einer als Refractions-Curve gesuchten Curve irgend eine Abhängigkeit herzustellen.

„Es existirt also bei parallel auffallenden Lichtstrahlen keine Refractions-Curve, welcher eine grade Linie als Diakaustika zugehört.“

Zweiter Fall. Wenn die auf die gesuchte Refractions-Curve auffallenden Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte herkommen, so muss man (aus §. 3) für $v$ den Ausdruck 12) einführen; und dabei geht Gleichung 433) über in

$$442)\quad \Big\{(x-A)\cdot p-\big(y-(mA+\mathfrak{A})\big)\Big\}\cdot\big((x-g)+y\cdot p\big)$$
$$=\Big\{(x-A)+\big(y-(mA+\mathfrak{A})\big)\cdot p\Big\}\cdot\sqrt{\lambda^2\cdot(1+p^2)\cdot\big((x-g)^2+y^2\big)-\big((x-g)+y\cdot p\big)^2}$$

Mit dieser Gleichung verfahre man jetzt weiter, wie mit Gleichung 354) in §. 20; so bekommt man die Urgleichung

$$443)\quad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\sqrt{(x-A)^2+\big(y-(mA+\mathfrak{A})\big)^2}=G$$

wo $A$ und $G$ die beiden Integrations-Constanten sind. Setzt man $\mathfrak{x}$ statt $A$, so geht letztere Gleichung über in

$$444)\quad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+\big(y-(m\cdot\mathfrak{x}+\mathfrak{A})\big)^2}=G$$

oder, wegen Gleichung 427), in

$$445)\quad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}=G$$

Die hier gefundene Gleichung ist im Allgemeinen eine des vierten Grades, welcher sich aber auf den zweiten erniedrigt, wenn $G=0$.

Vergleicht man die im §. 20 hergestellte Gleichung 356) mit der hier gefundenen Gleichung 445), so erkennt man, dass, wie sich dort die gebrochenen Strahlen in dem vorgeschriebenen Brennpunkte $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ concentriren mussten, hier die gebrochenen Strahlen sich im Brennpunkte $(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ concentriren, d. h. jeder einzelne Punkt der hier als Diakaustika vorgeschriedenen Graden 427) ist ein Brennpunkt zu irgend einer der durch 445) dargestellten Curven. Nun ist bereits (in §. 21) auseinandergesetzt, dass keine einzige der hier gefundenen Curven im Stande ist, von der vorgeschriebenen Diakaustika mehr als einen Punkt zu erzeugen, und dass man, um zur gesuchten Refractions-Curve zu gelangen, die Gränz-Curven der zweiten Ordnung aufsuchen müsse. Zu diesem Ende gehen die in §. 21 aufgestellten zwei Gleichungen 371) und 373) diesmal über in

$$446)\quad (y-\mathfrak{y})-(x-\mathfrak{x})\cdot m=0$$

und

$$447)\quad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot\sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2}=K\pm\lambda\cdot\mathfrak{x}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

Eliminirt man die Differenz $(y-\mathfrak{y})$ aus 446) und 447), so bekommt man

$$\sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot(x-\mathfrak{x})\cdot\sqrt{1+m^2}=K\pm\lambda\cdot\mathfrak{x}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

oder

$$448)\quad \sqrt{(x-g)^2+y^2}\mp\lambda\cdot x\cdot\sqrt{1+m^2}=K$$

Eliminirt man ferner den Bestandtheil $\mathfrak{y}$ aus 427) und 446), so fällt auch $\mathfrak{x}$ mit hinweg; und es bleibt nur

449) $$y = m \,.\, x + \mathfrak{A}$$

Weil nun bei jeder Elimination des Bestandtheiles $\mathfrak{y}$ auch das $\mathfrak{x}$ mit hinwegfällt, so ist es auch diesmal unmöglich, zwischen der als Diakaustika vorgeschriebenen Graden 427) und zwischen einer als Refractions-Curve gesuchten Curve irgend eine Relation herzustellen.

„Es existirt also auch bei den von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen keine Refractions-Curve, welcher eine grade Linie als Diakaustika angehört."

## Zweite Auflösung.

Man differentiire Gleichung 428) nach allem $x$, so bekommt man

450) $$(v+m) \,.\, \left(2 + \frac{dp}{dx} \,.\, \frac{dx}{dv} - (v+p) \,.\, \frac{d^2v}{dv^2}\right) = 0$$

und dieser Gleichung wird genügt, entweder wenn

451) $$2 + \frac{dp}{dx} \,.\, \frac{dx}{dv} - (v+p) \,.\, \frac{d^2v}{dv^2} = 0$$

oder wenn

452) $$v + m = 0$$

Erstens. Lässt man Gleichung 451) gelten, so bekommt man durch Integration

453) $$(y-B) + (x-A) \,.\, v = 0$$

während, damit die vorgelegte Differentialgleichung 428) erfüllt wird, zwischen den Integrations-Constanten $A$ und $B$ folgende Relation

454) $$B = m \,.\, A + \mathfrak{A}$$

stattfinden muss. Um nun die Differentialgleichung 453) nochmals integriren zu können, muss man von jetzt an unterscheiden, ob die Lichtstrahlen parallel auf die gesuchte Refractions-Curve auffallen, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen. Dabei ergibt sich im ersten Falle (nach §. 16)

455) $$\mp \lambda \,.\, \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = x + E$$

und im zweiten Falle (nach §. 21)

456) $$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \mp \lambda \,.\, \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = G$$

Man hat hiermit wiederum die vorhin in der ersten Auflösung gefundenen zwei Gleichungen 437) und 445); und diese führen also auch wiederum zu dem Resultate, dass keine Refractions-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Diakaustika angehört.

Zweitens. Lässt man die Gleichung 452) gelten, so bekommt man

457) $$v = -m$$

d. h. $v$ ist constant. Man muss aber vor Allem untersuchen, ob $v = -m$ die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Integral ist, oder nicht; und zu diesem Ende eliminire man $B$ aus 453) und 454), so bekommt man

458) $$\big(y - (mA + \mathfrak{A})\big) + (x - A) \,.\, v = 0$$

Diese Gleichung reducirt sich, wenn man $-m$ statt $v$ einsetzt, sofort auf

459) $$y = m \,.\, x + \mathfrak{A}$$

Der Integrations-Constante $A$ ist also weggefallen, ohne dass er irgend eine Bestimmung gefunden hat; und daraus folgt, dass $v = -m$ nicht die Differentialgleichung zu einem einfach singulären Integral ist. Somit erkennt man zum zweiten Male, dass keine Refractions-Curve existirt, welcher eine grade Linie als Diakaustika angehört.

Zusatz. Alle hier (§. 27) befindlichen refractorischen Resultate gehen, wenn man $\lambda = -1$ setzt, in die reflexorischen (§. 26) über. Aber alsdann dürfen bei den Doppelzeichen nur die oberen genommen werden.

# INHALT.